MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 7 : Relaciones

4 de Mayo del 2018

Recordemos algunas cosas vistas en cátedra

Relación: Una 3-tupla $(A, B, \mathcal{R})$ se dice *relación* si se cumple que $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.

Observación: Para $(a, b) \in A \times B$, denotaremos $a\mathcal{R}b$ cuando $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $a\not\mathcal{R}b$ cuando $(a, b) \notin \mathcal{R}$.

A se llama *dominio* de la relación y B el *codominio* de la misma.

En lugar de escribir $(A, B, \mathcal{R})$, diremos que $\mathcal{R}$ es una relación en $A \times B$ (O una relación de A en B.)

Observación: Cuando tengamos una relación en $A \times A$, diremos a secas que es una relación en A.

Prop: Se dice que la relación $\mathcal{R}$ en A:

- es **Refleja** si $(\forall x \in A, x\mathcal{R}x)$
- es **Simétrica** si $\forall x, y \in A(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$
- es **Antisimétrica** si $\forall x, y \in A(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y)$
- es **Transitiva** si $\forall x, y, z \in A(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$

Relación de Orden: $\mathcal{R}$ será *relación de orden* si es refleja, antisimétrica y transitiva.

Orden Total: Diremos que la relación de orden $\mathcal{R}$ es *orden total* si $\forall x, y \in A,\ x, y$ son comparables. (Esto es, para cualesquiera x, y, tenemos $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.)

Relación de Equivalencia: $\mathcal{R}$ será *relación de equivalencia* si es refleja, simétrica y transitiva.

Clase de Equivalencia: dado un elemento $a \in A$, definimos la *clase de equivalencia de **a** asociada a R* como el conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A | a\mathcal{R}x\} \subseteq A$$

Conjunto Cuociente: Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le llama *conjunto cuociente*, y se denota $A/\mathcal{R}$.

$$\text{i.e. } A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} | a \in A\}$$

Prop. Una propiedad muy potente es la siguiente

$$[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$$

Prop. Para toda relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A, el conjunto $A/\mathcal{R}$ es una *partición* de A. (Recordar la idea de partición)

P1.- [Preparación] Determine si las siguientes son relaciones de orden/equivalencia

a) "x es amigo en Facebook de y"

b) "x es descendiente de y"

c) "x llegó en la misma posición o antes que y en una carrera"

P2.- [Salió en mi control]

a) Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ por:

$$m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m = n \vee \{2|n \wedge 2|m\}$$

1) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

2) Halle todas las clases de equivalencia definidas por $\mathcal{R}$

b) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Se define la relación Ω en A por $x\Omega y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Demuestre que Ω es relación de orden en A.

P3.- [¿Es verdad?]
Sean $\sim_1, \sim_2$ relaciones de equivalencia en A. Se define una nueva relación $\sim_v$ de la siguiente forma:

$$x \sim_v y \Leftrightarrow x \sim_1 y \vee x \sim_2 y$$

¿$\sim_v$ es una relación de equivalencia? Justifique o dé un contraejemplo.

P4.- [Más relaciones]
Sea Q una relación en $\mathbb{R}$. Se define el conjunto $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | f \text{ es función}\}$.
Además definimos la relación $\mathcal{R}$ en A por: $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \exists n \geq 0,\ \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} : f(k)Qg(k)$

a) Probar que $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(0)Qg(0)$

b) Probar que si $\mathcal{R}$ es relación de orden, entonces, Q es relación de orden.

P5.- [Relación-es]
Considere la relación de orden $\mathcal{R}$ en E. Definimos una nueva relación $\mathcal{R}^\star$ en $E \times E$:

$$(a, b)\mathcal{R}^\star(c, d) \Leftrightarrow (a \neq c \wedge aRc) \vee (a = c \wedge b\mathcal{R}d)$$

Pruebe que $\mathcal{R}^\star$ es relación de orden.

P6.- [Problema adicional]
Sea $\mathcal{R}$ la relación dada por

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}$$

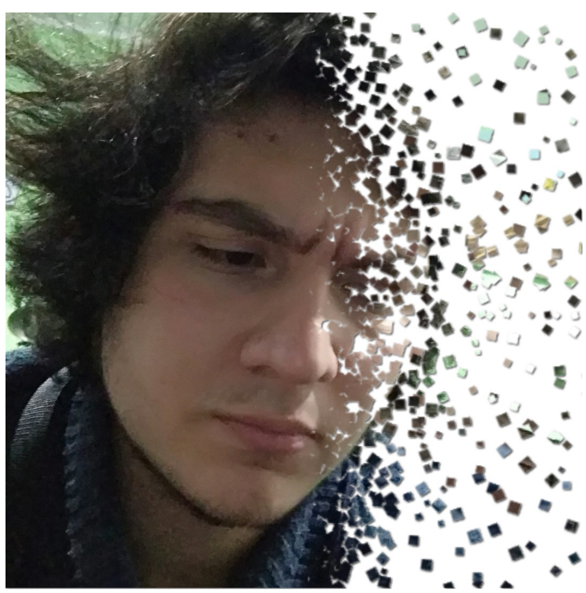
Vea el tipo de relación que es $\mathcal{R}$ en:

a) $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{R}$

b) $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{Q}$

c) $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{Z}$

d) $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{N}$



“No quiero morir, señor Matamala. Lo siento...”