Pauta Aux 6

Matías Azócar Carvajal

P1) Vamos a utilizar que

$$A \setminus B = \emptyset \iff A \subseteq B.$$

En este caso, $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$.

$$\Rightarrow f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup \underbrace{f^{-1}(B)}_{\subseteq f^{-1}(A)}$$ / la unión se porta bien con la preimagen.

$$= f^{-1}(A)$$

Llegando a lo pedido.

P2) Veamos de que forma podemos obtener el conjunto de referencia.

- Queremos hallar los conjuntos (X, Y) tales que $f(X, Y) = E$.

$$X \setminus Y = E$$

notemos que tenemos un conjunto X al que le quitamos cosas y obtenemos el conjunto más grande posible.

Tiene sentido entonces que X solo pueda ser E y, a su vez, $Y = \emptyset$.

Se ve por contradicción que si $X \neq E$ o $Y \neq \emptyset$, no es posible que $X \setminus Y = E$ (Lo hicimos en el aux)

Falta hallar los pares $(X, Y) \in P(E) \times P(E)$ tales que $f(X, Y) = \emptyset$, esto nos pide que:

$$X \setminus Y = \emptyset, \text{ tal como vimos antes,}$$

si esto sucede, se tiene $X \subseteq Y$.

Luego, el conjunto preimagen es, justamente,

$$f^{-1}\{E, \emptyset\} = \{(E, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}.$$

- Si tomamos cualquier par (X, X) y le aplicamos f, obtenemos: $f(X, X) = X \setminus X = \emptyset$.

Luego, el conjunto $f(D) = \{\emptyset\}$.

P3) • pdq $f(f(X)) = f(X)$.

$$f(\underbrace{A \cap (B \cup X)}_{\text{mi nueva variable}}) = A \cap (B \cup (\underbrace{A \cap (B \cup X)}_{\text{mi nueva variable}}))$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap (A \cap (B \cup X)))$$

$$= (A \cap B) \cup (\underbrace{(A \cap A)}_{A} \cap (B \cup X))$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap (B \cup X))$$

$$= A \cap (\underbrace{B}_{\subseteq B \cup X} \cup (B \cup X))$$

$$= A \cap (B \cup X) = f(X)$$

• * $A \neq E$, como $A \subseteq E$, sabemos que A está <u>estrictamente</u> incluido en A ($A \subsetneq E$)

Tomaremos un par de conjuntos $X_1, X_2 \subseteq E$ tales que $f(X_1) = f(X_2)$ pero que $X_1 \neq X_2$

Como los únicos conjuntos que conocemos distintos son A y E, probaremos con ellos.

$$f(A) = A \cap (B \cup A) = (A \cap B) \cup (A \cap A) = A \cap (A \cap B) = A \cap B.$$

$$f(E) = A \cap (B \cup E) = A \cap B$$

Tenemos ¡$f(A) = f(E)$! Sin embargo, la inyectividad nos dice que A debería ser igual a E, pero sabemos que $A \neq E$, luego, f no es inyectiva.

* Cuando $B \neq \emptyset$ hay un desarrollo similar, ¡háganlo ustedes!

• El contraejemplo es que E no tiene preimagen (al igual que en la pregunta anterior, $A \subsetneq E$)

Usando que $X \cap Y \subseteq X$ (la intersección achica) deberían llegar al resultado.

(Lo hicimos en el aux, porfa háganlo).

P4) • $\psi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$, pero por definición, $\forall x \in E : x \in E$.

Luego, $\psi_E(x) = 1$.

Análogamente, $\psi_\emptyset(x) = 0$.

• $\psi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cap B \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \Leftrightarrow \psi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \psi_{A\cap B} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \vee x \notin B \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$

Ahora, miremos $\psi_A \cdot \psi_B$.

$$\psi_A \cdot \psi_B = \begin{cases} 0 \cdot 1 & \text{si } x \notin A \wedge x \in B \\ 1 \cdot 0 & \text{si } x \in A \wedge x \notin B \\ 0 \cdot 0 & \text{si } x \notin A \wedge x \notin B \\ 1 \cdot 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$\therefore \psi_A \cdot \psi_B = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cap B \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \psi_{A\cap B} //$$

• Si $C \subseteq D$, entonces tenemos la implicancia siguiente:

Si $x \in C \Rightarrow x \in D$.

analizando $\psi_C(x) \wedge \psi_D(x)$ tenemos:

Si $\psi_C(x) = 1 \Leftrightarrow x \in C \Rightarrow x \in D \Leftrightarrow \psi_D(x) = 1$.

Si $\psi_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin C$ ... esto no nos dice nada sobre D.

Entonces:

$\left.\begin{array}{l} \psi_C(x) = 1 \Rightarrow \psi_D(x) = 1 \\ \psi_C(x) = 0 \Rightarrow \psi_D(x) = 1 \vee \psi_D(x) = 0 \end{array}\right\}$ De aquí vemos que $\psi_D(x) \geq \psi_C(x)$.

El caso para el otro lado es exactamente lo mismo, $\left.\begin{array}{l} \text{si } \psi_D(x) = 1 \Rightarrow \psi_C(x) = 0 \vee \psi_C(x) = 1 \\ \psi_D(x) = 0 \Rightarrow \psi_C(x) = 0 \end{array}\right\}$ Con esto, concluimos que $C \subseteq D$.

• λ biyectiva: Sean $A_1, A_2 \subseteq E$.

Inyectiva: $\lambda(A_1) = \lambda(A_2)$

$\iff \chi_{A_1}(x) = \chi_{A_2}(x) \quad (\forall x \in E)$

$\iff \chi_{A_1}(x) \leq \chi_{A_2}(x) \wedge \chi_{A_2}(x) \leq \chi_{A_1}(x) \quad (\forall x \in E)$

$\iff A_1 \subseteq A_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$

$\iff A_1 = A_2$, Luego, λ es inyectiva.

Tomemos una función que vaya de las partes de E a $\mathcal{F}$ arbitraria.

Veamos que existe su preimagen.

Si $\lambda(A) \in \mathcal{F}$, $\lambda(A) = \chi_A$.

Basta tomar A y ver que $\lambda(A)$ es su imagen.

(en realidad, pueden construir siempre el conjunto donde la función toma valor $1 \Rightarrow \in$ al conjunto y 0 si no pertenece)

$\therefore \lambda$ es ~~sobre~~ epiyectiva

Luego λ es biyectiva.

P5

$\Rightarrow)$

- $f \circ f$ es biyectiva $\to$ $f \circ f$ inyectiva $\wedge$ epi.

Como $f \circ f$ es inyectiva, f es inyectiva

Como $f \circ f$ es epiyectiva, f es epiyectiva

Como f es inyectiva y epiyectiva, f es biyectiva.

$\Leftarrow)$

Composición de biyectivas es biyectiva.

- Tomen siempre conjuntos con un único elemento
- esto es equivalente a decir que una función es estrictamente creciente, piensen que significa eso.
- una buena idea es definir $f(x) = x - 1$ (ver por que funciona y cumple lo que queremos)