MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 5 : Funciones

20 de Abril de 2018

Recordemos algunas cosas vistas en cátedra

Función: Una función de A en B es una *relación* contenida en $A \times B$ que cumple la siguiente propiedad:

Todos los elementos x del *dominio de la función* (A) están relacionados con un único elemento y en el *codominio* (B).

Comúnmente denotamos la siguiente relación $f(x) = y$
Observación: y es llamado la imagen de x según f
Observación: x es llamado la pre-imagen de y según f
Otra forma de verlo es la siguiente:

$$f := \{(a,b) | a \in A, b \in B, f(x) = y\}$$

Función Inyectiva: Una función de A en B será *inyectiva* sí y solo sí cumple la siguiente propiedad:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

En otras palabras, cada elemento de B tiene máximo UNA pre-imagen.
e.g. las funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ ($y = ax + b, a \neq 0$) son inyectivas. Un ejemplo de función no inyectiva es la función $y = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Función Epiyectiva: Una función de A en B será *epiyectiva* sí y solo sí cumple la siguiente propiedad:

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$$

En otras palabras, todos los elementos de B tienen AL MENOS UNA pre-imagen.
e.g. la función $y = x^2$ no es epiyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sin embargo, las lineales son epiyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Función Biyectiva: Una función de A en B será *biyectiva* sí y solo sí es inyectiva y epiyectiva. Esto es

$$\forall y \in B, \exists! x \in A : f(x) = y$$

O sea, para cada $y \in B$ existe una única pre-imagen $x \in A$
e.g. las funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son biyectivas.

Observación: Que una función no sea inyectiva no quiere decir que es epiyectiva ni viceversa. Hay muchas funciones que no son ni la una ni la otra.

Función Inversa: Denotamos a la *inversa* de f como f^{-1} y será lo siguiente:

$$f^{-1} := \{(b,a) | (a,b) \in f\}$$

Esto significa que $f^{-1}(y) = x$
Propiedad: f es biyectiva $\Leftrightarrow f^{-1}$ es función
Composición de funciones: Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, la *composición* de g con f se denota $g \circ f$ como la función de A en C que cumple que

$$\forall x \in A (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Observación: Fijémonos que es necesario que $Cod(f) \subseteq Dom(g)$ para que nuestra función compuesta quede correctamente definida
Observación: La composición ($\circ$) asocia.
Algunas propiedades interesantes son:

- f *y* g *inyectivas* $\Rightarrow g \circ f$ *es inyectiva*
- f *y* g *epiyectivas* $\Rightarrow g \circ f$ *es epiyectiva*
- f *y* g *biyectivas* $\Rightarrow g \circ f$ *es biyectiva*
- $g \circ f$ *es inyectiva* $\Rightarrow f$ *es inyectiva*
- $g \circ f$ *es epiyectiva* $\Rightarrow g$ *es epiyectiva*

P1. Dé dos ejemplos de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que sean:

- inyectivas, pero no epiyectivas
- epiyectivas, pero no inyectivas
- biyectivas

P2. Las siguientes funciones, ¿son inyectivas, epiyectivas o biyectivas?

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \to n+1$
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \to n+1$
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \to (x+y, x-y)$
- $\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{x+1}{x-1}$

P3. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre que

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \exists\ g : B \to A \text{ tal que } g \circ f = id_A$$

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

- ¿f es inyectiva? ¿es epiyectiva?
- Mostrar que el recorrido de f es $[-1,1]$
- Mostrar que $g : [-1,1] \to [-1,1], g(x) = f(x)$ es una biyección.

P5. Sean $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ demuestre que

$$g \circ f \text{ y } h \circ g \text{ son biyectivas.} \Leftrightarrow f, g \text{ y } h \text{ son biyectivas.}$$

P6. Sean $f : A \to B$ y $g, h : B \to A$
Además, $g \circ f = id_A$ y $f \circ h = id_B$

- Demuestre que f es biyectiva.
- Demuestre que $g = h = f^{-1}$