P1 | 1- Se tiene $\Rightarrow$, pero no $\Leftarrow$

2- Se tiene $\Rightarrow$, pero no $\Leftarrow$.

3- Se tiene $\Leftrightarrow$!!

4- Se tiene $\Leftarrow$ pero no $\Rightarrow$.

5- La relación correcta es "$\subseteq$", no "$=$".

6- La relación correcta es "$\supseteq$", no "$=$"

7- La relación correcta es "$\subseteq$", no "$=$"

8- La relación correcta es "$\supseteq$", no "$=$"

9- La relación correcta es "$=$".

* Recuerden que pueden usar diagramas de Venn para hacerse una idea de lo que está pasando, pero <u>no</u> es válido como demostración.

P2 | a) $(B \setminus A) \subseteq C \Leftrightarrow (B \cap A^c) \subseteq C$

$\Leftrightarrow C^c \subseteq (B \cap A^c)^c \Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$

por propiedad vista en aux.

b) $(B\setminus A)\subseteq C \Rightarrow (D\setminus C)\subseteq (D\setminus B)\cup A$

Usaremos la siguiente propiedad!

Si $A\subseteq B \wedge C\subseteq D \Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap D$ ✪

(Queda propuesto como ejercicio, no es muy difícil!)

Entonces, usando la parte a).

$(B\setminus A)\subseteq C \Leftrightarrow C^c\subseteq (B^c\cup A)$

Desarrollaremos un poco el lado derecho.

$D\setminus C = D\cap C^c$. ⊛

$(D\setminus B)\cup A = (D\cap B^c)\cup A = (D\cup A)\cap(B^c\cup A)$ ⊛⊛

Ahora, por ✪, tenemos que como:

$\underbrace{D\subseteq D\cup A}_{\text{propiedad, recuerden que la unión solo "agranda"}} \wedge \underbrace{C^c\subseteq B^c\cup A}_{\text{por hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{D\cap C^c\subseteq (D\cup A)\cap(B^c\cup A)}_{\text{justo lo que queríamos demostrar}}$ //.

c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq C$.

$\Rightarrow$) Suponemos lado izquierdo verdadero.

$$\underbrace{B \subseteq A \cup B}_{\text{definición}} = \overbrace{\underbrace{A \cap C \subseteq A}_{\text{definición}}}^{\text{hipótesis}} \Rightarrow B \subseteq A.$$

$$\underbrace{A \subseteq A \cup B = A \cap C \subseteq C}_{\text{análogo}} \Rightarrow A \subseteq C$$

concluyendo.

$\Leftarrow$) Suponemos lado derecho verdadero

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B \subseteq A \cup A \Leftrightarrow A \cup B \subseteq A.$$

$$A \subseteq C \Rightarrow A \cap A \subseteq C \cap A \Leftrightarrow A \cap C \supseteq A$$

$\Rightarrow A \cup B \subseteq A \subseteq A \cap C$, luego $A \cup B \subseteq A \cap C$.

Ahora, veamos si $A \cup B \supseteq A \cap C$ (si es así, por doble inclusión serán iguales).

$$B \subseteq A \Rightarrow B \cup B \subseteq A \cup B \Rightarrow B \subseteq A \cup B$$

$$A \subseteq C \Rightarrow A \cap C \subseteq C \cap C \Rightarrow A \cap C \subseteq C$$

pero ya sabemos que $A \cup B \subseteq A \cap C \Rightarrow B \subseteq C$.
(se puede deducir igual por $B \subseteq A \wedge A \subseteq C$).

Luego, veamos que $\underbrace{A \cup B \supseteq A}_{\text{definición}}$ y $\underbrace{A \supseteq A \cap C}_{\text{definición}} \Rightarrow A \cup B \supseteq A \cap C$

$\rightarrow$ Concluyendo, $A \cup B = A \cap C$ //

P3) Sean $x, y \in E$, tq $x \neq y$ (es clave tener 2 elem. distintos)

$$\Rightarrow \{x\} \in (P(E) \setminus \{\phi\}) \wedge \{y\} \in (P(E) \setminus \{\phi\})$$

Luego, si A fuese no vacío, tenemos:

$$A \subseteq \{x\} \Rightarrow A = \phi \vee A = \{x\}, \text{ pero } A \neq \phi$$

$$\Rightarrow A = \{x\}$$

$$A \subseteq \{y\} \Rightarrow A = \underbrace{\{x\} \subseteq \{y\}}_{\text{pero } x \neq y}$$

$\Rightarrow$ ¡ESTO NO PUEDE SER!

$\therefore$ A debe ser el conjunto vacío.

(Piensen que lo que hace A es, básicamente, ser subconjunto de cualquier subconj. de E. Eso es demasiado potente. Solo el vacío podía cumplir esta labor).

P4) La hacen ustedes, básicamente es definir

$p(x)$: "$x \in A$"
$q(x)$: "$x \in B$"
$r(x)$: "$x \in C$"

+ hacer los cambios apropiados y como ya demostraron la proposición en a, b es directo.

P5) La idea es ver lo siguiente:

$\bigcap_{i \in I(x)} A_i \neq \phi$ pues todos poseen a X.

$\Rightarrow$ queda demostrar que si $\bigcap_{i \in I(x)} A_i$ tuviera algún elemento que no fuera x, entonces no se cumpliría la propiedad que enunciamos.

Sean $x, y \in X$, tales que $x \neq y$. Además:

$\bigcap_{i \in I(x)} A_i = \{x, y\} \Rightarrow$ x e y están en todos los A_i, con $i \in I(x)$.

Pero por la propiedad anterior, $\exists j$ tq: $A_i \cap A_j = \phi$

$x \in A_i \wedge y \in A_j$ (pq $x \neq y$), sin embargo, si $x \in A_i \Rightarrow i \in I(x)$
$\Rightarrow y \in A_i$.

De lo anterior, deducimos que $A_i \cap A_j$ no es vacío! sino que es $\{y\}$.

La única forma de que esto pase es que y no exista. Luego, la única posibilidad para $\bigcap_{i \in I(x)} A_i = \{x\}$ //.

(Falta generalizar para más elementos, pero básicamente es el mismo argumento realizado muchas veces).

P6) $A \cap B \cap C = \phi \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup B \cup C$.

$$= (A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) \cup (C \cap A^c)$$

$$= \left(\left(A \cup (B \cap C^c)\right) \cap \left(B^c \cup (B \cap C^c)\right)\right) \cup (C \cap A^c)$$

$$= \left(\left[(A \cup B) \cap (A \cup C^c)\right] \cap \left[\underbrace{(B^c \cup B)}_{E} \cap (B^c \cup C^c)\right]\right) \cup (C \cap A^c)$$

$$= \left([A \cup B] \cap [A \cup C^c] \cap [B^c \cup C^c]\right) \cup (C \cap A^c)$$

([redacted]) mucha matraca.

¡Hay que ponerle weno!

$$= \left([A \cup B] \cup [C \cap A^c] \right) \cap \left([A \cup C^c] \cup [C \cap A^c] \right)$$

$$\cap \left([B^c \cup C^c] \cup [C \cap A^c] \right)$$

$$= \left[(\underbrace{A \cup B \cup C}_{\subseteq E}) \cap (\underbrace{A \cup B \cup A^c}_{E}) \right] \cap \left[(\underbrace{[A \cup C^c] \cup C}_{E}) \cap (\underbrace{A \cup C^c \cup A^c}_{E}) \right]$$

$$\cap \left([\underbrace{B^c \cup C^c \cup C}_{E}] \cap [\underbrace{B^c \cup C^c \cup A^c}_{\subseteq E}] \right)$$

$$= [\underbrace{A \cup B \cup C}_{\subseteq E}] \cap E \cap [\underbrace{B^c \cup C^c \cup A^c}_{\subseteq E}]$$

$$= (A \cup B \cup C) \cap [B^c \cup C^c \cup A^c] \quad / \text{De Morgan}$$

$$= (A \cup B \cup C) \cap \underbrace{[A \cap B \cap C]^c}_{[\phi]^c} \longleftarrow \text{hipótesis}$$

$$= (\underbrace{A \cup B \cup C}_{\subseteq E}) \cap E = A \cup B \cup C \;//$$

Era largo, pero salió.

A veces, basta ser ordenado para resolver !!