MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 2 : Inducción

28 de Marzo de 2018

Principio de inducción: Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ una función proposicional (definida para $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$) entonces se tendrá la siguiente equivalencia:

$$\underbrace{[P(n_0)}_{\text{caso base}} \wedge (\forall n \geq n_0,\ \underbrace{P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(n)}_{\text{Hipótesis inductiva H.I.}} \Rightarrow P(n+1))] \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0, P(n))$$

P1. Demuestre, por inducción, que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \ , \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

P2. Se define la siguiente recursión:

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2},\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}$$

Demuestre, por inducción, que:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{n+1} \ , \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

P3. Demuestre, por inducción, que:

$$5^{2n+1} + 2^{2n+1} \text{ es divisible por } 7 \ , \forall n \geq 0$$

P4. Demuestre, por inducción sobre n, que (con $p \in \{1, 2, \ldots\}$ un valor fijo):

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p-1) \text{ es divisible por } p,\ \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

P5. Demuestre, por inducción, que:

$$2n^3 - 3n^2 + n \text{ es divisible por } 6, \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

PROPUESTOS

P6. Demuestre, por inducción, que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \ , \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

P7. Demuestre, por inducción, que:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots + n \cdot 3^n = \frac{3}{4}[(2n-1) \cdot 3^n + 1] \ , \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

P8. Sea a un entero impar. Demuestre, por inducción, que:

$$2^{n+2} | a^{2^n} - 1 \ , \forall n \in \{1, 2, 3, ...\}$$

(Agradezco a David Painequeo por la creación de este problema)