MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: Domingo 23 de Abril.

Indicaciones guía control 3: Funciones

P1. Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to A$. Además se tiene que:

- $h \circ g \circ f$ es inyectiva
- $f \circ h \circ g$ es inyectiva
- $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva

Demuestre que f, g, h son biyectivas.
Indicación: recuerde que $\phi \circ \varphi$ inyectiva $\Rightarrow$ φ inyectiva y $\phi \circ \varphi$ sobreyectiva $\Rightarrow$ ϕ sobreyectiva, y que una $\varphi \circ \phi \circ \psi = (\varphi \circ \phi) \circ \psi = \varphi \circ (\phi \circ \psi)$. Concluya demostrando que g es biyectiva y componga con su inversa donde conviene.

P2. Sean A, B conjuntos no vacíos. Se define $\phi : A \times B \longrightarrow A$, $\phi(x, y) = x$.

(a) Demuestre que ϕ es sobreyectiva.

(b) Demuestre que ϕ es biyectiva si y solo si B tiene exactamente un elemento.
Indicación: Si ya saben que es sobreyectiva, solo falta ver la inyectividad.

(c) Para las condiciones anteriores, encuentre la inversa de ϕ.
Indicación: Recuerden que la sobreyectividad les da un candidato.

P3. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva } \}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

(a) Justifique por qué $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\Psi(f, g) \in \mathcal{F}$
Indicación: ¿Qué hay que cumplir para estar en $\mathcal{F}$

(b) Pruebe que Ψ es sobryetectiva, pero **no** inyectiva.
Indicación: Toda función biyectiva se puede escribir como composición de dos biyectivas, donde una es muuuy simple.

(c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

Indicación: Reemplace y matraquee.

(d) Sean $f, g \in \mathcal{F}$ definidas por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{f, g\}$.
Encuentre explícitamente $\Psi(A \times A)$.
Indicación: Calcule explícitamente $A \times A$ y todas sus imágenes.

P4. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$ y sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in C \end{cases}$$

(a) Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h también lo es.
Indicación: ¿Qué puede decir si ambas imágenes están en B? ¿Si ambas están en D? ¿Puede haber una en B y otra en D y sin embargo ser iguales?

(b) Demuestre que si f, g son sobreyectivas, entonces h también lo es.
Indicación: ¿Con quién puedo cubrir B? ¿Con quién puedo cubrir D?

(c) Demuestre que si f, g son biyectivas, entonces h también lo es y encuentre su inversa.
Indicación: Encuentre una inversa por partes.

P5. Sea $f : A \to B$ una función y $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, demuestre que:

(i) $C \subseteq f^{-1}(f(C))$. De un ejemplo en el que no se cumpla la otra inclusión y demuestre que si f es inyectiva entonces se cumple la igualdad.
Indicación: Si x está en C, ¿ cumple que es una pre-imagen de un elemento en $f(C)$?.
Para el contraejemplo considere $A = B = C = D = \{1, 2\}$ y una función no inyectiva.

(ii) $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$.

P6. Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U tales que $A \cap B = \phi$. Sea $f : U \to U$ una función.

(i) Probar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$.
Indicación: si hay un elemento en ambos, donde va a estar su imagen.

(ii) Probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \cap f(B) = \phi$.
Indicación: Si hubiese en ambos, donde está su pre-imágen?

(iii) Probar que si f es sobreyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$.
Indicación: Si tomas un $u \in U$, cuales son todos los casos posibles para donde esté su pre-imagen.

P7. Una función se dice estrictamente creciente si y sólo si

$$(\forall x, y \in Dom(f)), x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

(a) Pruebe que toda función estrictamente creciente es inyectiva
Indicación: ¿Qué puede decir si hay dos imágenes iguales?

(b) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, ¿es sobreyectiva?
Indicación: ¿Tienes que cubrir a todos para ser creciente?

(c) Pruebe que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente es sobreyectiva, entonces $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$
Indicación: Tomar el primer n tal que $f(n) \neq n$, que puede decir de $f(n) - f(n-1)$