Pruebe que el producto de las n-raices de la unidad es $(-1)^{n-1}$

Recordemos que una raiz es de la forma

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

$$\Rightarrow e^{i\frac{2\cdot 0\pi}{n}}\cdot e^{i\frac{2\cdot 1\pi}{n}}\cdot e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{n}}\cdots e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

(esto se escribe $\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

como multiplicamos con la misma base,
sumamos los exponentes

$$= e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k}$$

OJO!

Recordando que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

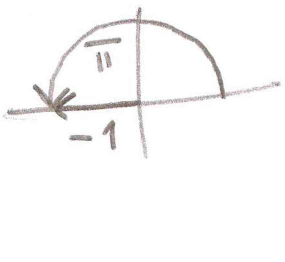
$$= e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)(n+1-1)}{2}} = e^{i\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{n}}(n-1)\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}}$$

$$= \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

2 formas de calcular $e^{i\pi}$

1) $\cos(\pi)+i\,\mathrm{sen}(\pi) = -1+0=-1$

2)



P5) USANDO ARGUMENTOS DE LA P3 ∧ P4

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k} \cdot \frac{\overline{z_k}}{\overline{z_k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|^2}$$

NOTAR QUE TODAS LAS RAICES SIEMPRE TIENEN EL MISMO MÓDULO
$\Rightarrow$ ES CTE Y SALE DE LA SUMATORIA

$$= \frac{1}{|z_1|} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} = \frac{1}{|z_1|} \overline{\sum_{k=0}^{n-1} z_k} = \frac{1}{|z_1|} \overline{0} = 0$$

PODRÍA SER CUALQUIERA
$z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee \cdots z_{n-1}$

(HAY UNA FORMA COMPACTA DE ESCRIBIR AMBAS SOLUCIONES $(-1)^{\dots} \dots$ PERO YO CREO QUE ES MÁS FÁCIL VER AMBAS POR SEPARADO).

P3

$x^4+2=0$

$\Rightarrow x^4=-2=2e^{i\pi}$

sea $x=re^{i\alpha}$

$\Rightarrow r^4=2 \Rightarrow r=\sqrt[4]{2}$

$\alpha=\dfrac{\pi+2k\pi}{4}=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}$

$k\in\{0,1,2,3\}$ //

$r_1=\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$r_2=\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$r_3=\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$r_4=\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow$ factorizado en $\mathbb{C}$

$$p(x)=\underbrace{\left(x-\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}_{(1)}\underbrace{\left(x-\sqrt[4]{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}_{(2)}\cdot$$

$$\underbrace{\left(x+\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}_{(3)}\underbrace{\left(x+\sqrt[4]{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}_{(4)}$$

EN $\mathbb{R}$ HAY QUE MULTIPLICAR (1) CON (2) Y (3) CON (4) NOTANDO LA SUMA POR DIFERENCIA.

PAUTA AUXILIAR 14

P1] ya que es un polinomio de $\underline{\underline{\text{grado } 3}}$, es de la forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \quad , \text{ con } \quad a \neq 0.$$

como el polinomio es mónico, necesariamente $a = 1$.
Tenemos entonces: $x^3 + bx^2 + cx + d$.

sabemos que $p(0) = 0$

$$\iff 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = 0$$

ya sabemos entonces que nuestro polinomio es de la forma:

$$x^3 + bx^2 + cx$$

Pero también sabemos que $p(2) = 0$

$$\iff 2^3 + b2^2 + c \cdot 2 = 8 + 4b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow c = -4 - 2b \quad (\star)$$

pero aún nos falta una ecuación para encontrar $b$ y $c$.

Nos dicen que el resto de dividir $p(x)$ en $(x-3)$ es igual al de dividirlo en $(x-1)$.

Recordemos que el teorema del resto nos dice que al dividir un polinomio $p(x)$ en algo de la forma $(x-c)$, el resto es $p(c)$.

Por lo tanto el resto de dividir $p(x)$ en $(x-3)$ es $p(3)$ y el de dividir $p(x)$ en $(x-1)$ es $p(1)$

$$\Rightarrow p(3) = p(1)$$

$$\iff 3^3 + b3^2 + c \cdot 3 = 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1$$

$$\iff 27 + 9b + 3c = 1 + b + c$$

$$\iff 8b + 2c = -26$$

reemplazando $c$ de $(\star)$ queda

$$8b + 2(-4 - 2b) = -26$$

$\Leftrightarrow \quad 8b - 8 - 4b = -26$

$\Leftrightarrow \quad 4b = -18$

$\Rightarrow \quad b = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$

$\Rightarrow \quad c = -4 - 2 \cdot -\frac{9}{2} = 5$

$\Rightarrow \quad p(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5$

P2) Notemos que $z^6 - 2iz^3 - 1 = (z^3 - i)^2$

Entonces tenemos que resolver

$$(z^3 - i)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z^3 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 = i$$

$z = Re^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow \quad (Re^{i\theta}) = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \qquad k \in \{0, 1, 2\}$$

$\Rightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$\Rightarrow \quad (z^3 - i) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$

($z_1$, $z_2$ y $z_3$ son las raices de $z^3 - i$)

$\Rightarrow \quad z^6 - 2iz^3 - 1 = (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 (z - z_3)^2 = 0$

multiplicidad

$\therefore$ las raices son $z_1$, $z_2$ y $z_3$ y cada una tiene multiplicidad 2.

P4] $p(x) = \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \sum_{k=1}^{j} (4k^3 x^{j-1})$

$$= \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \cdot 4x^{j-1} \underbrace{\sum_{k=1}^{j} k^3}_{\left(\frac{j(j+1)}{2}\right)^2}$$

← suma conocida

$$= \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{\cancel{(j+1)^2}} \cdot \cancel{4} x^{j-1} \cdot \frac{j^2 \cancel{(j+1)^2}}{\cancel{4}}$$

$$= \sum_{j=1}^{6} (-1)^j \cdot j^2 x^{j-1} = 36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

Nuevamente, tenemos que si una raíz es de la forma $\frac{r}{s}$

$$r \mid a_0 \quad \wedge \quad s \mid a_n$$

Como estamos buscando raíces enteras, son de la forma

$$r = \frac{r}{1} \Rightarrow r \mid a_0$$

Entonces tenemos que buscar entre los números que dividen a $-1$, es decir $1$ y $-1$.

Probemos:

$$p(1) = 36 - 25 + 16 - 9 + 4 - 1 \neq 0$$
$$p(-1) = -36 - 25 - 16 - 9 - 4 - 1 \neq 0.$$

$\therefore$ $p(x)$ NO tiene raíces enteras.

P5) a) Recordemos que una relación es de equivalencia si es refleja ($xRx \ \forall x$), simétrica ($xRy \Rightarrow yRx \ \forall x,y$) y transitiva ($xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$).

- Veamos que es refleja:

$z_1 R z_1 \iff z_1 \cdot \overline{z_1} \in \mathbb{R}$

pero $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 R z_1$

$\therefore$ R es refleja

- P.D.Q: R es simétrica

supongamos que $z_1 R z_2$

$\iff z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} \in \mathbb{R}$

$\iff \overline{z_1} \, z_2 \in \mathbb{R}$

$\iff z_2 \cdot \overline{z_1} \in \mathbb{R}$

$\iff z_2 R z_1$

$\therefore$ R es simétrica

- P.D.Q: R es transitiva

supongamos que $z_1 R z_2 \wedge z_2 R z_3$

$\iff z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R} \wedge z_2 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$ (multiplicación de reales es real)

$\iff |z_2|^2 \cdot z_1 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$

pero $|z_2|^2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$

$\iff z_1 R z_3$ //

$\therefore$ R es transitiva

$\therefore$ R es una relación de equivalencia.

b) P.D.Q $[z]_R = \{a \cdot z : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

Recordemos que la clase de equivalencia de z son todos aquellos que se relacionan con z, es decir:

$$[z]_R = \{w : wRz\}$$

pero $wRz \Leftrightarrow w \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow w \cdot \bar{z} = r \quad , r \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow w = \frac{r}{\bar{z}} \cdot \frac{z}{z}$

$\Leftrightarrow w = \frac{r}{|z|^2} \cdot z$ , $\frac{r}{|z|^2} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow w = a \cdot r \quad , a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow [z]_R = \{a \cdot z : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

P6) a) sabemos que $z^n = 1 \wedge w^m = 1$

$\Rightarrow z^n \cdot w^m = 1$

Estamos buscando $K$ tal que $(zw)^K = 1$

Basta tomar $K = m \cdot n$

$(zw)^K = (zw)^{mn} = z^{mn} \cdot w^{mn} = (z^n)^m \cdot (w^m)^n$

$= 1^m \cdot 1^n = 1 \cdot 1 = 1$

b) P.D.Q: $(G, \cdot)$ es subgrupo

- P.D.Q $G \neq \emptyset$

En efecto, $1 \in G$ ya que $1^n = 1$

$\therefore G \neq \emptyset$

- P.D.Q $\forall x, y \in G \quad x \cdot y^{-1} \in G$

$\Leftrightarrow$ P.D.Q $x \cdot y^{-1}$ es raíz n-ésima de la unidad para algún n.

Por (a) sabemos que la multiplicación de 2 raíces también es raíz.

como $x \in G$, $x$ es raíz, falta ver que $y^{-1}$ también lo es.

como $y \in G$, "$y$" es raíz m-ésima para algún m

$\Leftrightarrow y^m = 1$

$\Rightarrow (y^{-1})^m = \left(\frac{1}{y}\right)^m = \frac{1}{y^m} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow y^{-1}$ también es raíz m-ésima de la unidad

por (a), $\exists K$ tal que $(x \cdot y^{-1})^K = 1$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in G$

$\therefore (G, \cdot)$ es subgrupo.

c) P.D.Q $\varphi: (G, \cdot) \to (G, \cdot)$ es isomorfismo

$\varphi(w) = \frac{1}{w}$

- P.D.Q: $\varphi$ es morfismo

En efecto $\varphi(x \cdot y) = \frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

- P.D.Q $\varphi$ es Biyectiva

veamos que $\exists\, \varphi^{-1}$

$$\varphi(\varphi^{-1}(w)) = w$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varphi^{-1}(w)} = w$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi^{-1}(w) = \frac{1}{w}$$

$\therefore$ $\varphi^{-1}(w)$ existe

$\therefore$ $\varphi$ es Biyectiva

$\therefore$ $\varphi$ es isomorfismo

P6) $S_1 \neq \phi \wedge S_2 \neq \phi$ pues en ambos están el $0$.

además $S_1 \subseteq \mathbb{Z} \wedge S_2 \subseteq \mathbb{Z}$

PARA QUE $(S_1, +)$ sea grupo

$\Rightarrow \forall x, y \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1$

$x \in S_1 \Rightarrow x = 3K$

$y \in S_1 \Rightarrow y = 3K' \Rightarrow -y = -3 \cdot K' = 3 \cdot (-K') = 3K''$

$\Rightarrow x + (-y) = 3K + 3K'' = 3(K + K'')$

Análogo para $S_2$.

Veamos para $(S_1 \cup S_2, +)$

$S_1 \cup S_2 \neq \phi$ pues $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2 \wedge S_1 \neq \phi$

además $S_1 \subseteq \mathbb{Z} \wedge S_2 \subseteq \mathbb{Z}$

$\Rightarrow S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ //

Veamos si $\forall x, y \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow (x + (-y)) \in S_1 \cup S_2$

~~Se~~sabemos que si $x, y \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2$
$y \in S_1 \vee y \in S_2$

por la parte anterior sabemos que

$x \in S_1 \wedge y \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1 \cup S_2$

idem para $S_2$

el caso interesante es

$x \in S_1 \wedge y \in S_2$ (QUE ES IGUAL A $x \in S_2 \wedge y \in S_1$)

$x+(-y) = 3K + 2K'$ ¿es necesariamente esto de la forma $3K''$ v $2K'''$?

NO POR EJEMPLO SI $K = K' = 1$

$\Rightarrow x+(-y) = 5 \neq 2K''' \vee 3K''$

$\Rightarrow (S_1 \cup S_2, +)$ NO ES SUBGRUPO.

si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n^2+5n}{3} \Rightarrow ¿a_n?$

$$\parallel$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \frac{n^2+5n}{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2+5n}{3} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2+5n}{3} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2+5n}{3} - \left(\frac{(n-1)^2 + 5(n-1)}{3}\right)$$

$$= \frac{n^2+5n - (n^2 - 2n + 1 + 5n - 5)}{3}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + \cancel{5n} - \cancel{n^2} + 2n - 1 - \cancel{5n} + 5}{3}$$

$$= \frac{2n+4}{3}$$

$$//$$

PDQ: $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff Im(z)=0 \lor |z|=1$

$\Rightarrow$ $z=a+bi$ ademas $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

$$\frac{z\bar{z}}{|z^2|}=\frac{1}{z}$$

$$z+\frac{1}{z}=z+\frac{\bar{z}}{|z|^2}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2)i+a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a(a^2+b^2)+a+b(a^2+b^2-1)i}{a^2+b^2}$$

para que $\in \mathbb{R} \Rightarrow Im\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$

$\Rightarrow b(a^2+b^2-1)=0$

$\Rightarrow b=0 \quad \lor \quad a^2+b^2=1$

$\Rightarrow Im(z)=0 \quad \lor \quad |z|^2=1$

$\Rightarrow Im(z)=0 \quad \lor \quad |z|=1$ //

$\Rightarrow Im(z)=0$

$\Leftarrow$ si $Im(z)=0 \Rightarrow z\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{z}\in\mathbb{R} \Rightarrow z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ //

si $|z|=1 \Rightarrow z+\frac{\bar{z}}{|z|^2}=z+\bar{z}=2\,Re(z)\in\mathbb{R}$ //

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \overline{z}$

1) PDQ: $f$ es isomorfismo entre $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

1.1) PDQ: $f$ es biyectivo

1.1.1) PDQ: $f$ es inyectivo

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \overline{x} = \overline{y} \quad \left( \overline{(\ )} \right)$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$$

$$\star \Rightarrow \boxed{x = y} \quad \therefore f \text{ iny.} \quad //$$

1.1.2) PDQ: $f$ es sobreyectivo

basta tomar $\overline{z}$ y $f(\overline{z}) = \overline{\overline{z}} = z$

$\Rightarrow$ TODO $z$ TIENE PRE-IMAGEN

$\star\star \Rightarrow f$ sob //

$\star + \star\star \Rightarrow f$ biyectiva //

1.2) PDQ: $f$ es morfismo

1.2.1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = f(x) + f(y) \quad //$$

1.2.2) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

$$f(xy) = \overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y} = f(x) \cdot f(y) \quad //$$

$\therefore$ $f$ es isomorfismo.