

RECORDAR que w es raíz n -ésima
de z si

$$w^n = z \quad \text{si} \quad w = R e^{i\alpha} \\ z = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow (R e^{i\alpha})^n = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R^n e^{i\alpha n} = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R^n = R_2 \quad \wedge \quad e^{i\alpha n} = e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[n]{R_2} \quad \wedge \quad \alpha n = \beta + \underline{\underline{2k\pi}} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt[n]{R_2}} \quad \wedge \quad \boxed{\alpha = \frac{\beta + 2k\pi}{n}}$$

P2) Si $w^3 = 1$ con $w \neq 1$

$$\Rightarrow (1+w)^3 + (1+w^2)^3 + (1+w^3)^3 = 62$$

De la pregunta anterior

$$w^3 = 1 \Rightarrow w = \overset{(w_1)}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} \vee w = \overset{(w_2)}{e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

$$\Rightarrow w^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \vee w^2 = e^{i\frac{8\pi}{3}}$$

↑
ES LA
SEGUNDA
OPCIÓN.

↑
¿ ES LA
PRIMERA,
OPCIÓN?

Si PUES

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(\frac{2\pi}{3} + 2\pi)}$$

$\Rightarrow$ Da lo mismo
AL ELEVARLA AL
CUBO LA OTRA!

QUE RAÍZ SEA
CUADRADO

ADemás LA SUMA DE LAS
RAÍCES SIEMPRE DA CERO!

$$\Rightarrow 1 + w_1 + w_2 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + w_2 = -w_1 \quad \wedge \quad 1 + w_1 = -w_2$$

$$\text{Si } w = w_1$$

$$\Rightarrow (1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6$$

$$= (-w_2)^3 + (1+w_2)^9 + (1+1)^6$$

$$= -1 + ((-w_1)^3)^3 + 64$$

$$= -1 + (-1)^3 + 64$$

$$= -2 + 64$$

$$= 62 //$$

Si $w = w_2$ ES LO MISMO,
CAMBIANDO w_1 POR w_2 $\wedge$ VICEVERSA.

P3 a) De la P1 sabemos como sacar raíces n -ésimas

como $-1 = e^{i\pi}$

$$\Rightarrow W = e^{i \frac{(\pi + 2k\pi)}{n}} //$$

b) Si uno se fija el caso (b) es un caso particular de (a) si uno llama

$$W = \frac{1+z}{1+\bar{z}}$$

la ec queda $W^n = -1$
que es EXACTAMENTE LA DE (a)

AHORA BIEN EN GENERAL
SI UNO TIENE INFO SOBRE $|z|$
Y HAY UN $\bar{z}$ SIEMPRE SE USA QUE

$$|z|^2 = z \bar{z} \Rightarrow \bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$$

EN ESTE CASO $|z| = 1$

$$\Rightarrow w = \frac{1+z}{1+\bar{z}} = \frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} = z \left(\frac{1+z}{1+z} \right)$$

1 (PUES $z \neq -1$)

$$\Rightarrow \boxed{w = z}$$

OTO REVISAR QUE
NO ESTOY DIV. POR CERO.

$\Rightarrow$ LA SOLUCIÓN TAMBIÉN ES

$$e^{i \frac{(\pi + 2k\pi)}{n}}$$

P3 $x^4 + 2 = 0$
 $\Rightarrow x^4 = -2 = 2e^{i\pi}$

sea $x = re^{i\alpha}$

$\Rightarrow r^4 = 2 \Rightarrow r = \sqrt[4]{2}$

$\alpha = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{(2k+1)\pi}{4}$
 $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ //

$r_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$
 $= \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$r_2 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$r_3 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$r_4 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$\Rightarrow$ factorizado en $\mathbb{C}$

$$p(x) = \overset{(1)}{\left(x - \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)} \overset{(2)}{\left(x - \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)} \cdot$$

$$\overset{(3)}{\left(x + \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)} \overset{(4)}{\left(x + \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)}$$

En $\mathbb{R}$ Hay que multiplicar (1) con (2)

y (3) con (4) notando la
 suma por diferencia.

Sea $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$
 $y \quad q(x) = x^2 + x + 1$

PDA: $q(x) \mid p(x)$

forma bruta:

$$\begin{array}{r} x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2} \div x^2 + x + 1 = x^{3n_1-2} + x^{3n_2-1} \\ - (x^{3n_1} + x^{3n_1-1} + x^{3n_1-2}) \\ \hline x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2} + x^{3n_1-1} + x^{3n_1-2} \\ - (x^{3n_2+1} + x^{3n_2} + x^{3n_2-1}) \\ \hline x^{3n_3+2} + \dots \end{array}$$

parece que este camino no funciona
 pues siguen apareciendo
 $x^{3n_1}, x^{3n_2}, x^{3n_3} \dots$

OTRA FORMA. dividiendo por raíces de $q(x)$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

a estas alturas es fácil ver que

$$x_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} \quad x_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}}$$

$$P(x_1) = \left(e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)^{3n_1} + \left(e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)^{3n_2+1} + \left(e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)^{3n_3+2}$$

$$= (e^{i2\pi})^{n_1} + (e^{i2\pi})^{n_2} e^{i\frac{2\pi}{3}} + (e^{i2\pi})^{n_3} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

¡ Suma de las 3 raíces de la unidad !

$$\Rightarrow p(x_1) = 0 //$$

$$\Rightarrow (x - x_1) \mid p(x) \quad \star$$

^ recordando que $x_2^2 = x_1$

$$\Rightarrow p(x_2) = 0 //$$

$$\Rightarrow (x - x_2) \mid p(x) \quad \star\star$$

$$\star + \star\star \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) \mid p(x)$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 \mid p(x) //$$

Considere $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$
 se sabe que $x_1 = 2 + 3i$ es raíz de P
 factorizarlo en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$

Como x_1 es raíz $\Rightarrow \overline{x_1}$ también es.
 Si bien podríamos dividir $P(x)$
 en $(x - x_1)$ y luego en $(x - \overline{x_1})$ para
 factorizarlo, es mejor dividirlo
 en $(x - x_1)(x - \overline{x_1})$ pues P no tiene "i"

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x - (2 + 3i))(x - (2 - 3i)) \\ &= (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) \\ &= ((x - 2) - 3i)((x - 2) + 3i) \quad \left(\begin{array}{l} \text{suma por dif} \\ \text{que fácil } 0 \end{array} \right) \\ &= (x - 2)^2 - (3i)^2 = x^2 - 4x + 4 - 9i^2 = x^2 - 4x + 4 + 9 \\ &= x^2 - 4x + 13 \end{aligned}$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 \div x^2 - 4x + 13 = \boxed{x^2 + 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 \\ - (x^4 - 4x^3 + 13x^2) \\ \hline 0 + 2x^3 - 7x^2 + 22x + 13 \\ - (2x^3 - 8x^2 + 26x) \\ \hline 0 + x^2 - 4x + 13 \\ - (x^2 - 4x + 13) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 13)$$

$$\text{factorizado en } \mathbb{R} = (x+1)^2 (x^2 - 4x + 13) //$$

$$\text{factorizado en } \mathbb{C} = (x+1)^2 (x-2-3i)(x-2+3i) //$$

P5. Sea $p(x) = 6x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 18x$. Sabiendo que p admite 3 raíces enteras no negativas, factorice p .

Sol: $p(x) = x(6x^4 - 25x^3 + 16x^2 + 21x - 18)$, de clases sabemos que si r es raíz entera del polinomio necesariamente debe dividir a -18 , por lo que $r \in \{18, 9, 6, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -6, -9, -18\}$ sin embargo como sabemos que es no negativa solo miramos $r \in \{18, 9, 6, 3, 2, 1\}$. Reemplazando notamos que $p(1) = 0$, por lo que dividimos por $(x - 1)$.

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - 25x^3 + 16x^2 + 21x - 18 : (x - 1) = 6x^3 - 19x^2 - 3x + 18 \\
 -(6x^4 - 6x^3) \\
 \hline
 -19x^3 + 16x^2 + 21x - 18 \\
 -(-19x^3 + 19x^2) \\
 \hline
 -3x^2 + 21x - 18 \\
 -(-3x^2 + 3x) \\
 \hline
 18x - 18 \\
 -(18x - 18) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Ahora factorizamos $s(x) = 6x^3 - 19x^2 - 3x + 18$ y sigue teniendo término constante 18, por lo que los candidatos son los mismos. Después de un rato, nos damos cuenta que $s(3) = 0$.

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 19x^2 - 3x + 18 : (x - 3) = 6x^2 - x - 6 \\
 -(6x^3 - 18x^2) \\
 \hline
 -x^2 - 3x + 18 \\
 -(-x^2 + 3x) \\
 \hline
 -6x + 18 \\
 -(-6x + 18) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Finalmente como tenemos un término cuadrático aplicamos la fórmula para factorizar en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{12}$$

Con esto se concluye que la factorización tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$ sería

$$p(x) = x(x - 1)\left(x - 3\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{145}}{12}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{145}}{12}\right)$$