MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesores: Pablo Dartnell
Auxiliares: Juan Pedro Ross
Fecha: Martes 21 de Agosto.

Guía 2 examen

P1. Considere el conjunto L cuyos elementos son las y los estudiantes de su sección. Usaremos la siguiente notación:

$$
\begin{aligned}
A_a &= \{ \text{ El conjunto de todas(os) las y los estudiantes de la sección cuyo apellido comienza con A} \} \\
A_b &= \{ \text{ El conjunto de todas(os) las y los estudiantes de la sección cuyo apellido comienza con B} \} \\
A_c &= \{ \text{ El conjunto de todas(os) las y los estudiantes de la sección cuyo apellido comienza con C} \} \\
&\vdots \\
A_z &= \{ \text{ El conjunto de todas(os) las y los estudiantes de la sección cuyo apellido comienza con Z} \}
\end{aligned}
$$

Argumente si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) $\forall \alpha, \beta \in \{a, b, c, \dots, z\}$ distintos $, A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

b) $A_a \cup A_b \cup A_c \cup \cdots \cup A_z = L$

c) $|A_a| + |A_b| + |A_c| + \cdots + |A_z| = |L|$

P2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} \ \ (f \circ f)(x) = 2x + a$, para algún $a \in \mathbb{R}$ ¿Es f es biyectiva?

P3. *a*) Demuestre utilizando inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

b) Demuestre lo mismo sin utilizar inducción.

P4. Determine si son ciertas las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdaderas demuestrelo, sino dé un contra ejemplo:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}[X]$ tiene todas sus raices en $\mathbb{Z}$

b) Un polinomio en $\mathbb{R}[X]$ de grado impar tiene al menos una raiz en $\mathbb{R}$

c) Dados dos polinomios p y q siempre se cumple que $gr(p) + gr(q) = gr(p + q)$

P5. Factorice en $\mathbb{C}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$ los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$

b) $p(x) = x^6 - 2x^5 - 3x + 6$

c) $p(x) = x^3 + 4x^2 + 13x - 50$

P6. Si A, B y C son conjuntos que cumplen que $A \cap (B \cup C)^c = \emptyset$.

a) Demuestre que $A \subseteq B \cup C$

b) Demuestre que $A = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

P7. Muestre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)$

P8. Determine si las afirmaciones son ciertas:

a) Dado un conjunto $E \neq \emptyset$, la estructura $(\mathcal{P}(E), \cup)$ es un grupo.

b) Dado un conjunto $E \neq \emptyset$, la estructura $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ es un grupo.

c) El conjunto $\{[0]_{13}, [1]_{13}, [2]_{13}, [3]_{13}, [4]_{13}\}$ con la operación $+_{13}$ es subgrgupo de $(\mathbb{Z}_{13}, +_{13})$.

d) El anillo $(\mathbb{Z}_{100}, +_{100}, \cdot_{100})$ no tiene divisores de cero.