MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesores: Pablo Dartnell
Auxiliares: Juan Pedro Ross
Fecha: Martes 21 de Agosto.

Guía examen

P1. Pruebe que el producto de las n raíces n-ésimas de la unidad es igual a $(-1)^{n-1}$.

P2. Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado, $n \geq 2$ $\{z_0, ..., z_{n-1}\}$ las raíces n-ésimas de z. Calcule:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$$

P3. Considere el polinomio $p(x) = x^4 + 2$. Determine las raíces de p y escriba su factorización tanto en $\mathbb{R}[x]$ como en $\mathbb{C}[x]$.

P4. Determinar $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado 3, que satisfaga las siguientes condiciones.

- $p(0) = p(2) = 0$
- El resto de dividir $p(x)$ por $(x-1)$ es el mismo que el resto obtenido al dividir $p(x)$ por $(x-3)$

P5. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$ indicando la multiplicidad de cada raíz.

P6. Sea $p(x) = 6x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 18x$. Sabiendo que p admite 3 raíces enteras no negativas, factorice p.

P7. Pruebe que:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} (\sum_{k=1}^{j} 4k^3 x^{j-1}) = 36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

Además averigüe si tiene raíces enteras.

P8. Se define en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$.

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Muestre que $[z]_{\mathcal{R}} = \{a \cdot z | a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

P9. *a*) Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Pruebe que si z es raíz n-ésima de la unidad y w es raíz m-ésima de la unidad, entonces existe $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ tal que $z \cdot w$ es raíz k-ésima de la unidad.

b) Sea $G = \{w \in \mathbb{C} | \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2, w^n = 1\}$, es decir G es la unión para $n \geq 2$ de las raíces n-ésimas de la unidad. Pruebe que $(G, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es la multiplicación habitual de $\mathbb{C}$.

c) Pruebe que $\varphi : (G, \cdot) \to (G, \cdot)$, tal que $\varphi(w) = \dfrac{1}{w}$ es un isomorfismo.

P10. Para $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, demuestre que:

$$(z + \frac{1}{z}) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \vee |z| = 1.$$

P11. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f(z) = \overline{z}$. Demuestre que f es un isomorifismo entre $(C, +, \cdot)$ y $(C, +, \cdot)$.

P12. Si

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n^2 + 5n}{3}$$

Determinar a_n.

P13. Considere los conjuntos $S_1 = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ y $S_2 = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$. ¿Son grupos $(S_1, +)$ y $(S_2, +)$? ¿Qué hay sobre $(S_1 \cup S_2, +)$?