MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesores: Pablo Dartnell
Auxiliares: Juan Pedro Ross
Fecha: Viernes 17 de Agosto.

Auxiliar 13: Complejos

- Si $z = a + ib$, entonces $z = \rho e^{i\phi}$, con $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\phi = arg(z) = \{$ángulo de rotación$\}$
- Si $z = \rho e^{i\phi}$, entonces $z = \rho[\cos(\phi) + i\,\mathrm{sen}(\phi)]$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ también $Im(Z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow Re(z) = z \Leftrightarrow Im(z) = 0$
- Las raíces n-ésimas de la unidad son: $w_k = e^{\frac{2\pi k}{n}}$, con $k = 0, ..., n-1$.
- Dado $w \in \mathbb{C}$ fijo, las soluciones de la ecuación $z^n = w$ son $\sqrt[n]{|w|}w_k e^{\frac{i \cdot arg(w)}{n}}$, con $k = 0, ..., n-1$, donde los w_k son las raíces n-ésimas de la unidad.
- La suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.

P1. Demuestra que para todo $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq -1$ y $|z| = 1$, se tiene que

$$\frac{1+z}{1+\overline{z}} = z.$$

P2. Sea $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$. Pruebe que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : f(z_1, z_2) \cdot f(\overline{z_1}, \overline{z_2}) \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

P3. *a)* Pruebe que $[|z| = 1 \wedge Re(z) = 1] \Leftrightarrow z = 1$.

b) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = |w| = 1$. Pruebe que

$$|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z = w.$$

P4. Encuentra los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = a.$$

Para $a = \sqrt{3}, i\sqrt{3}$.

P5. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z+1| = 1$. Prueba que z es raíz cúbica de la unidad.

P6. Sean $G = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ y $G' = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, y se define la suma de pares en G como

$$(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$$

(I) Demuestre que $(G', \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es el producto en $\mathbb{R}$.

(II) Observe que (G,+) es grupo. Demuestre que $(G, +)$ es isomorfo a $(G', \cdot)$.