

Pauta Super Guía Complejos

P.1 | PDQ $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \neq -1 \wedge |z|=1$

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}} = z$$

En efecto $\frac{1+z}{1+\bar{z}} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1+\bar{z}} \cdot \frac{z}{z}$

$$\Leftrightarrow \frac{z(1+z)}{z+z\bar{z}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(1+z)}{z+|z|^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(1+z)}{z+1}$$

$$\Leftrightarrow z \quad \text{qed}$$

Sea $f: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$$

PDO: $f(z_1, z_2) \cdot f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

$$f(z_1, z_2) \cdot f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = |z_1 + z_2| \cdot |\bar{z}_1 + \bar{z}_2|$$

$$= |(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)| = |z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2|$$

$$= | |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 | \quad \left(\begin{array}{l} \text{usando que} \\ |a+b| \leq |a| + |b| \end{array} \right)$$

$$\leq | |z_1|^2 | + |z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1| + | |z_2|^2 | \quad \left(\begin{array}{l} \text{EN } \mathbb{R} \text{ si} \\ b > 0 \Rightarrow |b| = b \end{array} \right)$$

$$= |z_1|^2 + |z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1| + |z_2|^2$$

$$\text{QUEREMOS } \leq (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2$$

faltaría ver que $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1| \leq 2|z_1z_2|$

Sea $z_1 = (a+bi)$ y $z_2 = (c+di)$

$$\Rightarrow |(a+bi)(c-di) + (c+di)(a-bi)| \quad (i^2 = -1)$$

$$= |ac - adi + bci - bdi^2 + ac - bci + adi - dbi^2|$$

$$= |2ac + 2bd| = 2|ac + bd| \stackrel{?}{\leq} 2|z_1z_2|$$

NOTAMOS QUE $z_1z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac - bd + (bc + ad)i)$

si fuese (+) tendríamos
listos pues diríamos

$$|a| \leq |a+bi|$$

(EN TODO TRIANGULO CATETO
MIDE MENOS QUE LA HIPOTENUSA)

PERO $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1\bar{z}_2|$

$$= |(ac - bd) + (bc - ad)i| //$$

(Acabo de cachar que era más simple //

$$|z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2| \leq |z_1\bar{z}_2| + |\bar{z}_1z_2| = 2|z_1z_2| //$$

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ t.q. $|z| = |w| = 1$

PDA: $|z+w| = |z|+|w| \Leftrightarrow z=w$

INDICACIÓN: Pruebe $[|z|=1 \wedge \operatorname{Re}(z)=1] \Leftrightarrow z=1$

Probemos primero la indicación

$$(\Leftarrow) z=1 \Rightarrow |z|=1 \wedge \operatorname{Re}(z)=1 //$$

$$(\Rightarrow) |z|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1 \wedge \operatorname{Re}(z)=1 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+b^2}=1 \Rightarrow 1+b^2=1 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\Rightarrow z=1+0i=1 //$$

Demostremos ahora el problema

$$(\Leftarrow) \text{ Si } z=w \Rightarrow |z+w| = |z+z| = 2|z| //$$

$$|z|+|w| = |z|+|z| = 2|z| //$$

$$\Rightarrow |z+w| = |z|+|w| = 2 \text{ (POR ENUNCIADO)}$$

$$|(a+bi)+(c+di)| = |(a+c)^2 + (b+d)^2| = 4$$

$$|a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2| = 4$$

$$\text{Como } |z|=1 \Rightarrow a^2+b^2=1$$

$$|w|=1 \Rightarrow c^2+d^2=1$$

$$\Rightarrow |2+2(ac+bd)| = 4$$

$$\Rightarrow |1+(ac+bd)| = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{ac+bd=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Re}(z\bar{w})=1} \text{ además } |z\bar{w}| = |z| \cdot |\bar{w}| = 1$$

EL HINT NOS DICE $z\bar{w}=1 \Rightarrow z = \frac{1}{\bar{w}} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{w}{1} = w$

$$\Rightarrow w=1$$

$$\Rightarrow \boxed{z=w} //$$

P4) PRIMERO RECORDEMOS QUG

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \overline{z} = 2 \operatorname{Im}(z) i$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^{2n}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{\overline{\sqrt{3} - i}}{2} \right)^{2n}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} - \overline{\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n}}$$

$$= 2 \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} \right) i$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3}$$

NO HAY SOLUCIÓN
IGUALANDO UN
UN IMAGINARIO

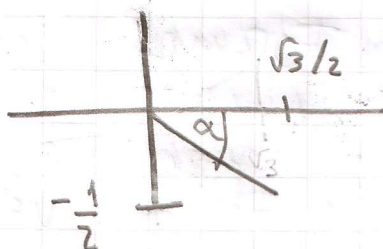
PUEDES ESTARIAS
NÚMERO REAL A
(QUE NO ES 0)

$\Rightarrow a = \sqrt{3}i$ ES EL ÚNICO CASO INTERESANTE.

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} \right) = \sqrt{3}$$

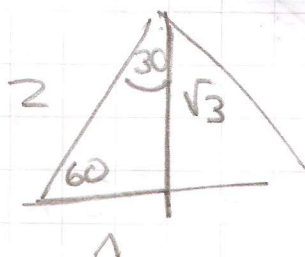
$$\Rightarrow \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3} - i}{2} =$$



$$\alpha = \arctan \left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$



$$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad \text{OJO CON EL "-"} \quad \swarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3} - i}{2} = e^{i \left(-\frac{\pi}{6} \right)}$$

$$\operatorname{Im} \left(\left(e^{i \left(-\frac{\pi}{6} \right)} \right)^{2n} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{i \left(-\frac{\pi n}{3} \right)} \right)$$

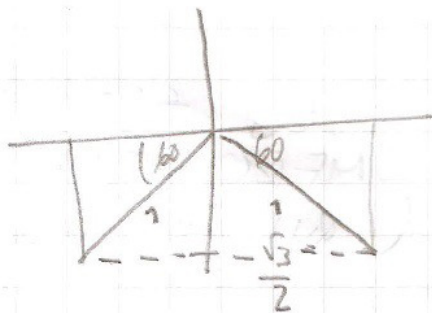
$$= \operatorname{Im} \left(\cos \left(-\frac{\pi n}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi n}{3} \right) \right)$$

$$= \sin \left(-\frac{\pi n}{3} \right) = -\sin \left(\frac{\pi n}{3} \right)$$

$\Rightarrow$ LA EC. QUE NOS QUEDA ES

$$\sin \left(\frac{\pi n}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 EJEMPLOS que $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ tiene 2 soluciones



$$\Rightarrow \frac{\pi n}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi \quad \vee \quad \frac{\pi n}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + 2K\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{n = -1 + 6K} \quad \vee \quad \boxed{n = 4 + 6K}$$

(HAY UNA FORMA COMPACTA
DE ESCRIBIR AMBAS SOLUCIONES
(-1) ... PERO YO CREO
QUE ES MAS FACIL VER AMBAS
POR SEPARADO). //

P1 /

Sea $z \neq 0$, $|z|=1$ $\wedge |z+1|=1$

PDQ: $z^3=1$

Como tenemos información de una SUMA
Lo MÁS RECOMENDABLE ES TRABAJAR
CON LA FORMA CARTESIANA.

Sea $z = a + bi$

como $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1 \Rightarrow a^2+b^2=1$

consideremos ahora

$z+1 = a + bi + 1 = a+1 + bi$

como $|z+1|=1 \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+b^2}=1 \Rightarrow (a+1)^2+b^2=1$

OJO! Cuando uno calcula el
módulo lo que uno hace es

$\sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$

Con $\text{Re}(z) = \underline{\text{TODO}}$ lo que NO TENGA "i"

$\text{Im}(z) = \underline{\text{TODO}}$ lo que ACOMPANE AL "i"

ES SUPER IMPORTANTE TENER EN
CUENTA QUE TANTO $\text{Re}(z)$ como $\text{Im}(z)$
SON REALES

$(\text{Im}(a+bi) = b \text{ (NO! } bi))$

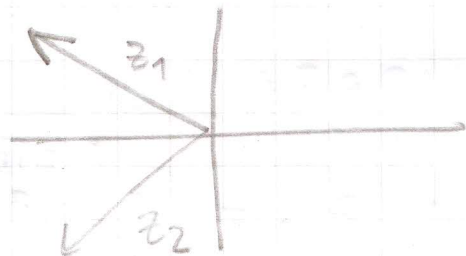
Volviendo al ejercicio.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + 2a + 1 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (z_1)$$

$$\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (z_2)$$



Veamos ahora que $z^3 = 1$
 como se trata de multiplicaciones
 lo RECOMENDABLE ES TRABAJARLO EN
 FORMA POLAR,

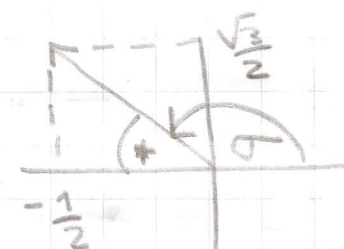
$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow R e^{i\sigma}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow R_2 e^{i\alpha}$$

Notemos que $R = R_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

(NO ERA NECESARIO CALCULARLO PUES
 sabemos que $|z| = 1$ (NUNCA ESTÁ
 DE MÁS CHEQUEAR))

Para el ángulo $\sigma =$



$$\tan \sigma = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

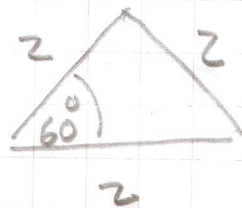
$$\Rightarrow \sigma = 120^\circ$$

(otra forma de verlo es $\sigma = 180^\circ - \star$)

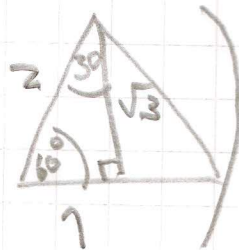
$$\tan \star = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \star = 60^\circ$$

(FORMA ÚTIL
DE SABERSE
LOS ÁNGULOS BÁSICOS



$\Rightarrow$

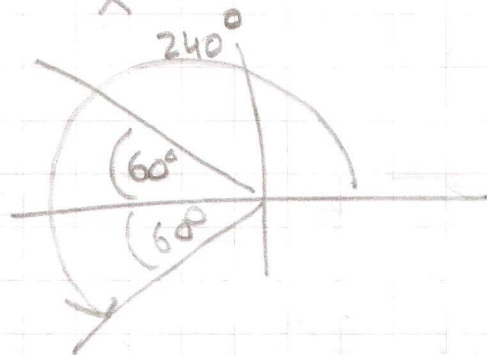


$$\Rightarrow z_1 = e^{i120} ! \quad \underline{\underline{NO}}$$

SE TRABAJA EN RADIANES ($180^\circ = \pi$)

$$\Rightarrow \underline{z_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}}}$$

PARA z_2 SE PUEDE HACER TODO EL CÁLCULO DENUEVO O DARSE CUENTA QUE ES EL SIMÉTRICO CON RESPECTO AL EJE X
 $\Rightarrow$



$$\Rightarrow z_2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} \quad \left(\text{TAMBIÉN SE PUEDE CONSIDERAR EL ÁNGULO NEGATIVO } -\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{finalmente } z_1^3 &= \left(e^{i \frac{2\pi}{3}} \right)^3 = e^{i 2\pi} = 1 = \\ z_2^3 &= \left(e^{i \frac{4\pi}{3}} \right)^3 = e^{i 4\pi} = 1 = \end{aligned}$$

(OTRA FORMA DE HACERLO ERA CALCULAR LAS RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD Y NOTAR QUE ERAN z_1 Y z_2)

RECORDAR que w es raíz n -ésima
de z si

$$w^n = z \quad \text{si} \quad w = R e^{i\alpha} \\ z = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow (R e^{i\alpha})^n = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R^n e^{i\alpha n} = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R^n = R_2 \quad \wedge \quad e^{i\alpha n} = e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[n]{R_2} \quad \wedge \quad \alpha n = \beta + \underline{\underline{2k\pi}} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt[n]{R_2}} \quad \wedge \quad \boxed{\alpha = \frac{\beta + 2k\pi}{n}}$$

En particular si $z=1$

$$\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[n]{1} = 1$$

$$\alpha = 0 + \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$\Rightarrow$ si BUSCAMOS LAS RAICES CUBICAS $n=3$

$$\Rightarrow w_1 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 0} = 1$$

$$w_2 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 1} = e^{i \frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_3 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 2} = e^{i \frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- **P6.** Sean $G = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ y $G' = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, y se define la suma de pares en G como

$$(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$$

- (i) Demuestre que $(G', \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es el producto en $\mathbb{R}$.

R:

- i) $G' \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pues si multiplico potencias de 2 y de 3 jamás llegaré al 0.
- ii) $1 \in G'$ pues $2^0 3^0 = 1$.
- iii) Sean $x, y \in G'$ por definición del conjunto esto significa que existen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x = 2^{a_1} 3^{b_1}$, $y = 2^{a_2} 3^{b_2}$ luego $x \cdot y^{-1} = 2^{a_1} 3^{b_1} \cdot (2^{a_2} 3^{b_2})^{-1} = 2^{a_1} 3^{b_1} \cdot (2^{-a_2} 3^{-b_2}) = 2^{a_1 - a_2} 3^{b_1 - b_2}$ y como $a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$ y $b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$ se concluye que $xy^{-1} \in G'$.

Luego como se cumple la propiedad compacta, se concluye que G' es subgrupo.

- (ii) Observe que $(G, +)$ es grupo. Demuestre que $(G, +)$ es isomorfo a $(G', \cdot)$.

R: Sea

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow G' \\ (a, b) &\longmapsto f(a, b) = 2^a 3^b \end{aligned}$$

- i) Morfismo: $f((a, b) + (c, d)) = f(a + c, b + d) = 2^{a+c} 3^{b+d} = 2^a 3^b 2^c 3^d = f(a, b) f(c, d)$, es decir es morfismo.
- ii) Sobreyectiva: Por definición de grupo todos los $y \in G'$ son de la forma $y = 2^a 3^b$ por lo que es directo que si tomamos $x = (a, b)$ se tendrá que $f(x) = y$ es decir es sobreyectiva.
- iii) Inyectiva: $f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow 2^a 3^b = 2^c 3^d$. Notemos que por más que yo multiplique el 2 consigo mismo jamás voy a lograr formar una potencia del 3 (y viceversa) por lo que la igualdad anterior implica que $2^a = 2^c$ y $3^b = 3^d$ y esto implica que $a = c$ y $b = d$, es decir $(a, b) = (c, d)$ y por lo tanto es inyectiva.

Como es morfismo y biyectivo es isomorfismo y por lo tanto G y G' son isomorfos.