MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Domingo 12 de Agosto 2018

Indicaciones guía control 6

P1. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $f : G \to G$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$, probar que f isomorfismo si y solo si G es grupo abeliano.
Ind: Si $a^{-1} * b^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \Rightarrow b * a = a * b$ y puede ser útil calcular $f \circ f$.

P2. Sea $(G, \cdot)$ grupo y H, K subgrupos de G, demuestre que $H \cup K$ es subgrupo de $G \Leftrightarrow H \subseteq K \vee K \subseteq H$.
Ind: $H \subseteq K \vee K \subseteq H \Leftrightarrow H \not\subseteq K \Rightarrow K \subseteq H$, y tener en cuenta que si $k \in K, h \in H$ y $kh \in H \Rightarrow k = khh^{-1} \in H$

P3. Sea $(G, \cdot)$ un grupo finito de orden 4, es decir $|G| = 4$, con neutro $e \in G$. Pruebe que $\forall a \in G \setminus \{e\}$ se tiene que $a^3 \neq e$ $(a^3 = a \cdot a \cdot a)$.
Ind: Asuma que es falso el resultado y ármese un subgrupo de 3 elementos, concluya usando el teorema de Lagrange.

P4. Sean $G = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ y $G' = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, y se define la suma de pares en G como

$$(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$$

(I) Demuestre que $(G', \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es el producto en $\mathbb{R}$.
Ind: Si $x, y \in G' \Rightarrow \exists a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} : x = 2^{a_1} 3^{b_1},\ y = 2^{a_2} 3^{b_2}$.

(II) Observe que (G,+) es grupo. Demuestre que $(G, +)$ es isomorfo a $(G', \cdot)$.
Ind: Estudie $f : G \to G'$ tal que $f(a, b) 2^a 3^b$. Para la inyectiv note que si multiplico muchas veces el 2 jamás llegaré a lo mismo que si multiplico muchas veces el 3.

P5. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se define $G \subseteq A$ por

$$G = \{a \in A \mid a \text{ tiene inverso para } \cdot\}$$

(I) Mostrar que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano.
Ind: Notar que $(A, \cdot)$ ya tiene casi todo lo necesario.

(II) Sea $H = \{a^2 \mid a \in G\}$. Pruebe que H es subgrupo de G.
Ind: Si $x, yH, \exists a_1, a_2 H : x = a_1^2,\ y = a_2^2$.

(III) Si $A = \mathbb{Z}_8$, encuentre G y H.
Ind: Puede hacerlo a mano, o bien demuestre que en Z_8 a tiene inverso multiplicativo si y solo si $mcd(a, 8) = 1$.

P6. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá ideal de A si y solo si:

- $(I, +)$ es grupo.
- $\forall a \in A, b \in I \quad a \cdot b \in I \wedge b \cdot a \in I$

(a) Sea $F : (A, +, \cdot) \to (B, \oplus, \odot)$ un morfismo de anillos. Demuestre que $F^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal de A donde 0_B es el neutro para $\oplus$ en B
Ind: Para ver que es (sub)grupo utilice la propiedad compacta y recuerde que $x, y \in F^{-1}(\{0_B\}) \Rightarrow F(x) = F(y) = 0.$, para lo otro aplique la definición de morfismo.

(b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$, e I ideal en A.

(I) Demuestre que si $1 \in I$, entonces $I = A$.
Ind: Aplique el segundo punto.

(II) Demuestre que si $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$, entonces $I = A$.
Ind: Demuestre que si hay un elemento invertible entonces está el 1.

(c) Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, considere $a \in A$ y defina el conjunto aniquilador de a , como $Ann(a) = \{b \in A \mid \text{ tal que } b \cdot a = 0\}$. Pruebe que $Ann(a)$ es un ideal.
Ind: Vea que es subgrupo usando la propiedad compacta y recuerde que $\forall x, y \in Ann(a) xa = ya = 0$. Para lo otro note que si $ax = 0 \Rightarrow yax = 0 \ \forall y \in A$.

P7. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo, con unidad y sin divisores de 0, sobre $A \times A \setminus \{0\}$ se define la siguiente relación de equivalencia (demuéstrelo):

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Adicionalmente sobre $A \times A \setminus \{0\}/\sim$ (el conjunto cuociente) denotamos la clase $[(a, b)]$ por $\frac{a}{b}$, y definimos las operaciones

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Pruebe que estas operaciones **están bien definidas** y que $(A \times A \setminus \{0\}/\sim, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $\frac{0}{1} = 0$ y $\frac{1}{1} = 1$.
Con esto puede notar que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}/\sim, +, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Ind: Si no tiene tiempo, no haga este ejercicio. Es bonito pero muy largo.

P8. Demuestre que $\mathbb{Z}_4$ es isomorfo a $\{1, i, -1, -i\}$.
Ind: Los elementos del conjunto son potencias de i.

P9. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z + 1| = 1$. Prueba que z es raíz cúbica de la unidad.
Ind: Escriba $z = a + bi$ y dele para adelante. Una vez que tiene los valores de a y b páselo a forma polar y verifique que al elevarlo a 3 da 1.

P10. Encuentra los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = a.$$

Para $a = \sqrt{3}, i\sqrt{3}$.
Ind: Recuerde que $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$ y que $z + \overline{z} = 2Re(z) \in \mathbb{R}$. Luego páselo haga un pequeño ajuste y vuélvalo a cartesianas para resolver la ecuación.

P11. Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado, $n \geq 2$ $\{z_0, ..., z_{n-1}\}$ las raíces n-ésimas de z. Calcule:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$$

Ind: Todas las raíces tienen módulo 1.