

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliar: Juan Pedro Ross

Fecha: Domingo 12 de Agosto 2018



Guía control 6

P1. Sea (G, \cdot) un grupo y $f : G \rightarrow G$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$, probar que f isomorfismo si y solo si G es grupo abeliano.

P2. Sea (G, \cdot) grupo y H, K subgrupos de G , demuestre que $H \cup K$ es subgrupo de $G \Leftrightarrow H \subseteq K \vee K \subseteq H$.

P3. Sea (G, \cdot) un grupo finito de orden 4, es decir $|G| = 4$, con neutro $e \in G$. Pruebe que $\forall a \in G \setminus \{e\}$ se tiene que $a^3 \neq e$ ($a^3 = a \cdot a \cdot a$).

Indicación: Use el teorema de Lagrange.

P4. Sean $G = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ y $G' = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, y se define la suma de pares en G como

$$(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$$

(i) Demuestre que (G', \cdot) es subgrupo de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde \cdot es el producto en \mathbb{R} .

(ii) Observe que $(G, +)$ es grupo. Demuestre que $(G, +)$ es isomorfo a (G', \cdot) .

P5. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se define $G \subseteq A$ por

$$G = \{a \in A \mid a \text{ tiene inverso para } \cdot\}$$

(i) Mostrar que (G, \cdot) es un grupo abeliano.

(ii) Sea $H = \{a^2 \mid a \in G\}$. Pruebe que H es subgrupo de G .

(iii) Si $A = \mathbb{Z}_8$, encuentre G y H .

P6. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá ideal de A si y solo si:

- $(I, +)$ es grupo.
- $\forall a \in A, b \in I \quad a \cdot b \in I \wedge b \cdot a \in I$

(a) Sea $F : (A, +, \cdot) \rightarrow (B, \oplus, \odot)$ un morfismo sobreyectivo de anillos. Demuestre que $F^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal de A donde 0_B es el neutro para \oplus en B

(b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$, e I ideal en A .

(i) Demuestre que si $1 \in I$, entonces $I = A$.

(ii) Demuestre que si $\exists x \in I$ invertible para \cdot , entonces $I = A$.

(c) Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, considere $a \in A$ y defina el conjunto aniquilador de a , como $Ann(a) = \{b \in A \mid \text{tal que } b \cdot a = 0\}$. Pruebe que $Ann(a)$ es un ideal.

P7. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo, con unidad y sin divisores de 0, sobre $A \times A \setminus \{0\}$ se define la siguiente relación de equivalencia (demuéstrelo):

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Adicionalmente sobre $A \times A \setminus \{0\} / \sim$ (el conjunto cociente) denotamos la clase $[(a, b)]$ por $\frac{a}{b}$, y definimos las operaciones

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Pruebe que estas operaciones **están bien definidas** y que $(A \times A \setminus \{0\} / \sim, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $\frac{0}{1} = 0$ y $\frac{1}{1} = 1$.

Con esto puede notar que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} / \sim, +, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

P8. Demuestre que \mathbb{Z}_4 es isomorfo a $\{1, i, -1, -i\}$.

P9. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z + 1| = 1$. Pruebe que z es raíz cúbica de la unidad.

P10. Encuentra los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = a.$$

Para $a = \sqrt{3}, i\sqrt{3}$.

P11. Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado, $n \geq 2$ $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ las raíces n -ésimas de z . Calcule:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$$