

P1) a) claramente si H y K son subconjuntos de G , $H \cap K$ también lo es.

veamos ahora que $\forall x, y \in (H \cap K), x * y^{-1} \in (H \cap K)$

en efecto;

$$x, y \in H \cap K \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H \\ x, y \in K \Rightarrow x * y^{-1} \in K \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pg: } H \text{ y } K \text{ son subgrupos.} \end{array} \right\} x * y^{-1} \in (H \cap K)$$

$\therefore H \cap K$ es subgrupo de G

b) como $H \cap K$ subgrupo $\Rightarrow |H \cap K| \mid |H| \wedge |H \cap K| \mid |K|$

y el único divisor común es el 1 $\Rightarrow |H| = 1$
 y el neutro siempre está $\Rightarrow H = \{e\}$ //

P2. Sean A, B grupos y $f : A \rightarrow B$ isomorfismo, demuestre que si C es subgrupo de A entonces $f(C)$ es subgrupo de B y que si D es subgrupo de B entonces $f^{-1}(D)$ también lo es (de A).

R: Veamos primero que ocurre con $f(C)$. Como C es subgrupo de A se tiene que $\emptyset \neq C \subseteq A \Rightarrow \emptyset \neq f(C) \subseteq B$. Sea $y_1, y_2 \in f(C) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in C : f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, veamos que $y_1 y_2^{-1} \in f(C)$, en efecto: $y_1 y_2^{-1} = f(x_1)(f(x_2))^{-1} = f(x_1 x_2^{-1})$, esto último pues f es morfismo (ojo que ese a la menos uno es inverso de la operación en B , no tiene nada que ver con la función inversa) y como C es subgrupo se cumple que $x_1 x_2^{-1} \in C$ con lo que se concluye que $f(x_1 x_2^{-1}) \in f(C)$ y por lo tanto es subgrupo.

De la misma forma, $\emptyset \neq f^{-1}(D) \subseteq A$, pues D contiene al menos al neutro, el cual siempre tiene pre-imagen, sea $x_1, x_2 \in f^{-1}(D) \Rightarrow f(x_1) \in D, f(x_2) \in D \Rightarrow f(x_1)(f(x_2))^{-1} \in D$, pues es subgrupo, y como f es morfismo se tiene que $f(x_1)(f(x_2))^{-1} = f(x_1 x_2^{-1}) \in D \Rightarrow x_1 x_2^{-1} \in f^{-1}(D)$, es decir que $f^{-1}(D)$ es subgrupo.

P4 veamos que $\forall x, y \in H \cdot K \quad x \cdot y^{-1} \in H \cdot K$

En efecto: $x \in H \cdot K \Leftrightarrow x = \tilde{h} \cdot \tilde{k}, \tilde{h} \in H \wedge \tilde{k} \in K$

$y \in H \cdot K \Leftrightarrow y = \hat{h} \cdot \hat{k}, \hat{h} \in H \wedge \hat{k} \in K$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x \cdot y^{-1} &= \tilde{h} \cdot \tilde{k} \cdot (\hat{h} \cdot \hat{k})^{-1} = \tilde{h} \cdot \tilde{k} \cdot \hat{k}^{-1} \cdot \hat{h}^{-1} \\ &= \tilde{h} \cdot \tilde{k} \cdot \hat{k}^{-1} \cdot \hat{h}^{-1} = \underbrace{\tilde{h} \cdot \hat{h}^{-1}}_{\substack{\nearrow \\ \text{conmuta pq:} \\ \text{es grupo abeliano}}} \cdot \underbrace{\tilde{k} \cdot \hat{k}^{-1}}_{\substack{\nearrow \\ \text{conmuta pq:} \\ \text{es grupo abeliano}}} = \tilde{h} \cdot \tilde{k} \in H \cdot K // \end{aligned}$$

a) Recordemos que:

$(A, +, \cdot)$ tiene divisores del 0 (neutro para +)

si $\exists a, b \neq 0$ t.q. $ab = 0$

como por enunciado a es divisor

$\exists c$ (que no es b) con $c \neq 0$

t.q. $ac = 0 = c \cdot a$

como queremos que
 ab sea divisor del cero
necesitamos que $\exists d \neq 0$ t.q.

$$d \cdot (ab) = (ab)d = 0$$

tomando $d = c$

$$c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b = 0 \cdot b = 0 //$$

$$(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot a) \cdot c = b(a \cdot c) = b \cdot 0 = 0 //$$

↑
pues es un anillo conmutativo,

∴ ab es divisor del cero

b) Si ac es divisor del 0

$$\Rightarrow ac \neq 0 \Rightarrow a \wedge c \neq 0$$

Además $\exists b \neq 0$ t.s

$$b \circ (ac) = 0$$

Si a NO ES DIVISOR DE C OERO

$$\forall d \neq 0 \quad ad = da \neq 0$$

en particular para $d = b$

$$\Rightarrow \underbrace{(b \circ a)}_{\neq 0} \circ \underbrace{C}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow (b \circ a) \wedge C$ son divisores de 0
en particular C que era lo que
me interesaba //

(Análogo el otro caso, NOTANDO QUE
EL ANILLO ES COMMUTATIVO $\Rightarrow b \circ a \circ C = b \circ C \circ a$)

... .. //

Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+bi} + \frac{2}{a-bi} = 1+i \quad \left(\text{como tenemos } \frac{1}{a+bi} \Rightarrow a+bi \neq 0 \right)$$

RECORDAMOS

$$\frac{1}{a+bi} + \frac{2}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} + \frac{2(a+bi)}{a^2+b^2} = 1+i$$

$$\Rightarrow a - bi + 2a + 2bi = (1+i)(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow 3a + bi = a^2 + b^2 + (a^2 + b^2)i$$

$\Rightarrow 3a + bi = a + b$

PERFECTO! 1 ecuación y 2 incógnitas

1 ecuación 11

PERFECTO! 1 ecuación
What me falta 1 ecuación !!
COMPLEJOS ES

What me falta =
NO LA IGUALDAD DE COMPLEJOS ES

FOR PARTIES!

LA IGUALDAD
2 PARTES!
 $a + bi = c + di \Rightarrow \boxed{a = c} \wedge \boxed{b = d}$

$$\Rightarrow 3a + b^2 = \frac{a^2 + b^2}{2 + 1^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2}{(1)}$$

$$\Rightarrow 3a = a^2 + b^2 \quad (1)$$

$$b = \frac{a^2 + b^2}{(z)} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 3a = b \quad \Rightarrow \quad 3a = a^2 + 9a^2 \Rightarrow 3a = 10a^2$$

Caso 1: si $a = 0$

(2) $\Rightarrow b = b^2 \Rightarrow b = 1 \vee b = 0$
 sine

o 1: si $a=0$
 $(2) \Rightarrow b=b^2 \Rightarrow b=1 \vee b=0$
 Notemos que ninguna sirve pues si $b=1 \Rightarrow 0=1$
 si $b=0 \Rightarrow a+bi=0$

Notemos que ninguno. si $b=0 \Rightarrow a+bi=0$

Caso 2: si $a = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{9}{10} = \frac{9}{100} + b^2 \Rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{81}{100}} = \pm \frac{9}{10}$

pero por (2) $b > 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{9}{10}}$

finalmente $a+bi = \frac{3}{10} + \frac{9}{10}i //$

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ Demuestre que

a) $(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \in \mathbb{R}$

NOTAMOS QUE $\overline{z_1 \bar{z}_2} = \bar{z}_1 \overline{\bar{z}_2} = \bar{z}_1 z_2$

$$\Rightarrow (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = (z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}) = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \in \mathbb{R} //$$

b) Demuestre que $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$

Sabemos que $(|z_1| - |z_2|)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 \geq 2|z_1||z_2| = 2|z_1 z_2|$$

y sabemos que $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2|$
 $= |z_1||z_2| = |z_1 z_2|$

$$\Rightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2|z_1 z_2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$$

$$\Rightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 //$$