MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Viernes 10 de Agosto del 2018

Auxiliar 12: Subgrupos, anillos y cuerpos

Resumen:
Sea $(A, +, \cdot)$ un conjunto con dos estructuras:

- Si $(A, *)$ es grupo, y $\phi \neq H \subseteq A$. Diremos que $(H, *)$ es **subgrupo**, si $(H, *)$ es un grupo, o equivalentemente
$$(\forall x, y \in H)\ x * y^{-1} \in H.$$
- **Teorema de Lagrange**. Sea $(G, *)$ un grupo finito y $(H, *)$ un subgrupo cualquiera de él.
Entonces $|H|$ divide a $|G|$.
- Se dice **anillo** si $(A, +)$ es grupo abeliano, y además $\cdot$ es asosciativa y distribuye con respecto a $+$.
- Se dice **anillo conmutativo con unidad** si es un anillo, y $\cdot$ es conmutativo y posee neutro.
- Si es un anillo con unidad con $|A| > 1 \Rightarrow 0 \neq 1$.
- Sean x, y ambos no nulos. Si $x \cdot y = 0$ se dice que x e y son **divisors del cero.**
Notar que en este caso $x \cdot a = x \cdot b \not\Rightarrow a = b$.
- Se dice **cuerpo** si es un anillo conmutativo con unidad y $\forall x \in A \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.
Notar que todo cuerpo no tiene divisores del cero (ojo es solo una implicancia).
- Si es un anillo conmutativo con unidad y $|A|$ finito lo anterior es una equivalencia.

P1. Sea $(G, \cdot)$ grupo y H, K subgrupos de G, demuestre que

(a) $H \cap K$ es subgrupo de G.

(b) Sean H y G tales que $|H| = 38$ y $|K| = 55$. Demostrar que $H \cap K = \{e\}$. Con e el neutro.

P2. Sean A, B grupos y $f : A \to B$ morfismo, demuestre que si C es subgrupo de A entonces $f(C)$ es subgrupo de B y que si D es subgrupo de B entonces $f^{-1}(D)$ también lo es (de A).

P3. $(G, \cdot)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Probar que el conjunto

$$H \cdot K = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, \cdot)$.

P4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

(a) Si $a \in A$ es un divisor del 0 y $b \in A$, tal que $a \cdot b \neq 0$,entonces $a \cdot b$ es divisor del 0.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor del 0, entonces al menos uno de ellos es divisor del 0.

P5. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\dfrac{1}{a+bi} + \dfrac{2}{a-bi} = 1 + i$.

P6. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que:

a) $(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$

b) $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$