P3) a) $f_e(x) = e * x * e^{-1} = e * x * e = x$

$\therefore f_e = Id_G$

$f_{a*b}(x) = (a*b) * x * (a*b)^{-1} = a*b*x*b^{-1}*a^{-1}$

$= f_a(b*x*b^{-1}) = f_a(f_b(x)) = f_a \circ f_b$ //

b) morfismo: $f_a(x*y) = a*x*y*a^{-1} = a*x*e*y*a^{-1}$

$= a*x*\underbrace{a^{-1}*a}_{e}*y*a^{-1} = f_a(x)*f_a(y)$

Biyección: veamos que f_a es invertible

Buscamos a g tal que $f_a \circ g = Id$

En efecto: $Id_G = f_e$ (por (a)) $= f_{a*a^{-1}} = f_a \circ f_{a^{-1}}$

$\therefore \forall a$ f_a^{-1} es invertible

$\Leftrightarrow$ f_a es biyectiva

$\therefore f_a$ es isomorfismo de $(G,*)$ en $(G,*)$.

$(\{f_a | a \in G\}, \circ)$ es grupo ya que todos los elementos tienen inverso, existe el neutro ($f_e = Id_G$) y la composición es asociativa

P2. Sea $(G, *)$ un grupo con elemento neutro e. Se define en $G \times G$ la ley de composición interna Δ como:

$$(a, b)\Delta(c, d) = (a * c, b * d), \forall (a, b), (c, d) \in G \times G.$$

(I) Pruebe que $(G \times G, \Delta)$ es grupo.

R: Notemos que como $(G, *)$ es grupo, sabemos que es lci, por lo que Δ también lo es (pues en cada componente toma dos elementos de G y retorna uno de G), además es asociativa pues $((a, b)\Delta(c, d))\Delta(e, f) = (a*c, b*d)\Delta(e, f) = ((a*c)*e, (b*d)*f) = (a*(c*e), b*(d*f)) = (a, b)\Delta(c*e, d*f) = (a, b)\Delta((c, d)\Delta(e, f))$. El neutro es el (e, e) (neutro de G en ambas coordenadas), ya que $(a, b)\Delta(e, e) = (a * e, b * e) = (a, b) = (e * a, e * b) = (e, e)\Delta(a, b)$. Finalmente como G es grupo, todo elemento tiene inverso así si los respetamos por coordenada tendremos que $(a, b)\Delta(a^{-1}, b^{-1}) = (a * a^{-1}, b * b^{-1}) = (e, e) = (a^{-1}a, b^{-1}b) = (a^{-1}, b^{-1})\Delta(a, b)$. Con todo esto se concluye que $(G \times G, \Delta)$, es grupo.

(II) Suponga ahora que $(G, *)$ es grupo abeliano y considere la función $\varphi : G \times G \to G$ definida por $\varphi((a, b)) = (a * b)^{-1}, \forall (a, b) \in G \times G$. Demuestre que φ es un homomorfismo de $(G \times G, \Delta)$ en $(G, *)$.

R: $\varphi((a, b)\Delta(c, d)) = \varphi(a * c, b * d) = (a * c * b * d)^{-1} = (a^{-1} * b^{-1} * c^{-1} * d^{-1}) = (a * b)^{-1} * (c, d)^{-1} = \varphi(a, b) * \varphi(c, d)$.

(III) ¿Es φ un isomorfismo? Justifique.
No pues e tiene muchas pre-imágenes, por lo que no es inyectiva. Si G es finito también se puede argumentar por que tienen distinto cardinal (a no ser que tenga 1 solo elemento, el neutro, donde es isomorfismo trivialmente).

P3. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito y $\mathcal{M} = \{B \subseteq A : B \text{ finito }\}$

a) ¿Cuál es la cardinalidad de A?
R: Como A es infinito $|\mathbb{N}| \leq |A|$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $|A| \leq |\mathbb{N}|$, con lo que se concluye que es numerable.

b) Demuestre que $\mathcal{M}_k = \{B \subseteq A : |B| = k\}$, es numerable.
R: Es claro que para $k = 0$ solo está el vacío así que para ese es 1, para $k = 1$ son puros síngletons por lo que tiene la misma cardinalidad que A es decir numerable. Para $k \geq 1$ razonamos por inducción.
Caso base $k = 1$ ya está hecho.
HI: Asumimos que para k se cumple que es numerable.
PI: Recordemos que en un conjunto no importa el orden, así que asumiremos que tienen los elementos ordenados, así M_{k+1} se puede separar en $M_{k+1,a_1}, M_{k+1,a_2}, \cdots$ donde $M_{k+1,a_i} = \{B \subseteq A : |B| = k$ y su primer elemento es $a_i\}$. De esta forma se tiene que $M_{k+1} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_{k+1,a_i}$ basta ver que cada uno de esos es numerable, para argumentar que como es una unión numerable de conjuntos numerables es numerable. En efecto, se puede notar que

$$\begin{aligned} f : M_{k+1,a_1} &\longrightarrow M_k \\ \{a_1, b_2, \cdots b_k, b_{k+1}\} &\longmapsto f(\{a_1, b_2, \cdots b_k, b_{k+1}\}) = \{b_2, \cdots b_k, b_{k+1}\} \end{aligned}$$

es una inyección (y se puede hacer lo mismo con cualquier M_{k+1,a_i}, así se concluye que $|M_{k+1,a_i}| \leq |M_k| = |\mathbb{N}|$, (esto último por HI) y como $|\mathbb{N}| \leq |M_{k+1,a_i}|$ (pues es infinito) se concluye, razonando como ya se dijo.

c) Calcule el cardinal de $\mathcal{M}$.
R: Se tiene que $\mathcal{M} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k$ lo que es una unión numerable de conjuntos numerables, es decir $\mathcal{M}$ es numerable.

d) ¿Cúal es el cardinal de $\mathcal{H} = \{B \subseteq A : B \text{ infinito }\}$?
R: Se tiene que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{M} \cup \mathcal{H}$ y sabemos que las partes de un conjunto numerable es no numerable, luego necesariamente debe ocurrir que $\mathcal{H}$ sea no numerable (sino sería unión de nos numerables, es decir numerable).

P4. Considere el conjunto $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F} = \{f : \{1,2,3\} \to A | f \text{ en función } \}$.

a) Demuestre que $|\mathcal{F}| = |A^3|$.
Indicación: Para $f \in \mathcal{F}$ considere la tupla $(f(1), f(2), f(3))$.

R: Una función está definida por tres cosas, el conjunto de partido, de llega, y lo que le hace a los $x's$, como acá todas parten y llegan a lo mismo solo pueden variar en lo último. Así tendremos que la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F} &\longrightarrow A^3 \\ f &\longmapsto \varphi(f) = (f(1), f(2), f(3)) \end{aligned}$$

es biyectiva. En efecto, la inyectividad viene de lo que discutí antes y la sobreyectividad de que dado un (a,b,c) cualquiera basta tomar la función tal que $f(1) = a, f(2) = by f(3) = c$.

b) Concluya que si A es numerable entonces $\mathcal{F}$ también lo es.

R: Si A es numerable entonces A^3 también lo es y por la parte anterior se concluye lo mismo para $\mathcal{F}$.

P5. Calcule, sin usar inducción:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{8^{k+1}}{3^i}$$

R:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{8^{k+1}}{3^i} &= 8\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^k = 8\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{3^i}(1+8)^i = 8\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}3^i \\
&= 24\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}3^i = 24\sum_{j=1}^{n}\frac{1-3^j}{-2} = 12\left(\sum_{j=1}^{n}3^j - \sum_{j=1}^{n}1\right) = 12\left(3\sum_{j=0}^{n-1}3^j - n\right) \\
&= 12\left(3\frac{3^n-1}{2} - n\right)
\end{aligned}$$