MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Viernes 3 de agosto 2018.

Auxiliar 11: Isomorfismos y Grupos

Resumen:
Sea $(A,*)$ una estructura algebraica.

- $(A,*)$ es un **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro $e \in A$ y todo elemento $x \in A$ tiene inverso $x^{-1} \in A$.
- Sean $(A,*)$ y (B,Δ) estructuras algebraicas, diremos que **f es morfismo** si es una función que cumple:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x * y &\longmapsto f(x*y) = f(x)\Delta f(y) \end{aligned} \quad (\forall x, y \in A)$$

Si además f es biyectivo se denomina **isomorfismo** y se habla de que $(A,*)$ es **isomorfo** (B,Δ)
Notación: $(A,*) \cong (B,\Delta)$.

P1. Sea $(G,*)$ un grupo no necesariamente abeliano, con neutro e.
Para $a \in G$ se defina la función $f_a : G \to G, f_a(x) = a * x * a^{-1}$.

(I) Pruebe que $f_e = id_G$ y que para todo $a, b \in G, f_{a*b} = f_a \circ f_b$. Donde $\circ$ es la composición de funciones.

(II) Pruebe que $\forall a \in G, f_a$ es un isomorfismo de $(G,*)$ en $(G,*)$.
Concluya que f_a es invertible con $f_a^{-1} = f_{a^{-1}}$ y que la estructura $(\{f_a | a \in G\}, \circ)$ es un grupo.

P2. Sea $(G,*)$ un grupo con elemento neutro e. Se define en $G \times G$ la ley de composición interna Δ como:

$$(a,b)\Delta(c,d) = (a*c, b*d), \forall (a,b),(c,d) \in G \times G.$$

(I) Pruebe que $(G \times G, \Delta)$ es grupo.

(II) Suponga ahora que $(G,*)$ es grupo abeliano y considere la función $\varphi : G \times G \to G$ definida por $\varphi((a,b)) = (a*b)^{-1}, \forall (a,b) \in G \times G$. Demuestre que φ es un homomorfismo de $(G \times G, \Delta)$ en $(G,*)$.

(III) ¿Es φ un isomorfismo? Justifique.

P3. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito y $\mathcal{M} = \{B \subseteq A : B \text{ finito }\}$

a) ¿Cuál es la cardinalidad de A?

b) Demuestre que $\mathcal{M}_k = \{B \subseteq A : |B| = k\}$, es numerable.

c) Determine el cardinal de $\mathcal{M}$.

d) ¿Cúal es el cardinal de $\mathcal{H} = \{B \subseteq A : B \text{ infinito }\}$?

P4. Considere el conjunto $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F} = \{f : \{1,2,3\} \to A | f \text{ en función }\}$.

a) Demuestre que $|\mathcal{F}| = |A^3|$.
Indicación: Para $f \in \mathcal{F}$ considere la tupla $(f(1), f(2), f(3))$.

b) Concluya que si A es numerable entonces $\mathcal{F}$ también lo es.

P5. Calcule, sin usar inducción:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{8^{k+1}}{3^i}$$