MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: 30 de agosto del 2018 .

Indicaciones guía control 5

P1. Calcule, sin usar inducción:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{8^{k+1}}{3^i}$$

Indicación: utilice sumas conocidas y tenga ojo con los límites de las sumas.

P2. Utilice el Teorema del Binominio de Newton en la expresión:

$$(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}$$

para probar, sin usar inducción, que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}=2^{2n-1}\ \forall n\geq 1$$

Indicación: siga las instrucciones, separe en sumas pares e impares, finalmente evalúe en un x conveniente.

P3. Un insecto debe cubrir, saltando, la distancia de 0 a 1 avanzando de izquierda a derecha. En cada punto que se encuentre, puede elegir saltar hasta 1 (y completar el recorrido) o avanzar la mitad del tramo restante. Pruebe que la colección de recorridos (secuencias de pasos) por los que puede optar el insecto es numerable.
Indicación: Tenga ojo con lo que le están preguntando, no nos importa el largo del camino, sino cuantos caminos posibles hay, y todos son finitos...

P4. Considere el conjunto $A\neq\emptyset$. Se define $\mathcal{F}=\{f:\{1,2,3\}\to A|f \text{ en función }\}$.

(a) Demuestre que $|\mathcal{F}|=|A^3|$.
Indicación: Para $f\in\mathcal{F}$ considere la tupla $(f(1),f(2),f(3))$.
Indicación: Recuerde cuales son los tres elementos que definen una función y luego establezca una biyección entre los conjuntos.

(b) Concluya que si A es numerable entonces $\mathcal{F}$ también lo es.
Indicación: utilice una propiedad conocida.

P5. Demuestre que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ es numerable.
Indicación: Tenga ojo que el conjunto NO ESTA DENTRO DE $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, pero quizás pueda establecer una biyección con un conjunto que si esté ahí.

P6. Sea E un conjunto numerable. En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ por $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists f : A \to B,$ biyectiva

Demuestre que si $A \in \mathcal{P}(E)$ es un conjunto infinito, $[A]_{\mathcal{R}}$ es la colección de subconjuntos numerables, es decir $[A]_{\mathcal{R}} = \{X \subseteq E \mid X \text{ es numerable}\}$ de E. Indique justificando, dos elementos distintos de $[A]_{\mathcal{R}}$
Indicación: Ojo que no le piden demostrar que $[A]_{\mathcal{R}}$ es numerable, sino que cada uno de sus elementos lo es. Concluya con propiedades conocidas.

P7. Considere $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

(i) Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.
(ii) Explique por qué $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ no es un grupo.
Indicación: ¿Todos los elementos tienen inverso?
(iii) Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.
Indicación: Analice la tabla de la primera parte.

P8. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e. Para $g \in G$, se define

- $kg = \underbrace{g * \cdots * g}_{k}$, si $k \in \mathbb{Z}$ y $k > 0$;
- $kg = -(\underbrace{g * \cdots * g}_{-k})$, si $k \in \mathbb{Z}$ y $k < 0$.
- $0g = e$.

Finalmente se define $< g >= \{kg : k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Demuestre que existe $g \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z} = < g >$, donde en ESTE CASO $*$ sería la suma común y corriente.
Indicación: ¿Hay un elemento en $\mathbb{Z}$ que si lo opero una cantidad suficiente de veces llego a cualquier número?.

b) Demuestre que
- $< g > \neq \emptyset$
Indicación: La definición siempre dice que se llega al...
- $< g > \subseteq G$.
Indicación: Si tomo un elemento de G y lo opero consigo mismo siempre me quedo en G porque... Si quiere ser más formal puede razonar por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$ y luego decir que se puede replicar para $k \in -\mathbb{N}$
- $\forall g_1, g_2 \in < g >$, se tiene que $g_1 - g_2 \in < g >$
Indicación: como $g_1 \in < g >$ $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_1 g = g_1$ y análogamente $k_2 g = g_2$, ponerse en casos $0 < k_1 < k_2,\ k_1 < 0 < k_2,\ k_1 < k_2 < 0,\ k_1 = 0$ (el resto es análogo).

Estas tres propiedades nos aseguran que $(< g >, +)$ siempre es un grupo.

c) Demuestre que si $f : (< g >, +) \to (B, \Delta)$, es isomorfismo, entonces $\exists b \in B$ tal que $B =< b >$.
Indicación considere $b = f(g)$.