

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliar: Juan Pedro Ross.

Fecha: 26 de agosto del 2018 .



Guía Control 5

P1. Calcule, sin usar inducción:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{8^{k+1}}{3^i}$$

P2. Utilice el Teorema del Binomio de Newton en la expresión:

$$(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$$

para probar, sin usar inducción, que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1} \quad \forall n \geq 1$$

P3. Un insecto debe cubrir, saltando, la distancia de 0 a 1 avanzando de izquierda a derecha. En cada punto que se encuentre, puede elegir saltar hasta 1 (y completar el recorrido) o avanzar la mitad del tramo restante. Pruebe que la colección de recorridos (secuencias de pasos) por los que puede optar el insecto es numerable.

P4. Considere el conjunto $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, 3\} \rightarrow A \mid f \text{ en función}\}$.

(a) Demuestre que $|\mathcal{F}| = |A|^3$.

Indicación: Para $f \in \mathcal{F}$ considere la tupla $(f(1), f(2), f(3))$.

(b) Concluya que si A es numerable entonces $\mathcal{F}$ también lo es.

P5. Demuestre que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.

P6. Sea E un conjunto numerable. En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ por $ARB \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B$, biyectiva

Demuestre que si $A \in \mathcal{P}(E)$ es un conjunto infinito, $[A]_{\mathcal{R}}$ es la colección de subconjuntos numerables, es decir $[A]_{\mathcal{R}} = \{X \subseteq E \mid X \text{ es numerable}\}$ de E . Indique justificando, dos elementos distintos de $[A]_{\mathcal{R}}$

P7. Considere $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

(i) Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.

(ii) Explique por qué $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ no es un grupo.

(iii) Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.

P8. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e . Para $g \in G$, se define

- $kg = \underbrace{g * \cdots * g}_k$, si $k \in \mathbb{Z}$ y $k > 0$;
- $kg = -(\underbrace{g * \cdots * g}_{-k})$, si $k \in \mathbb{Z}$ y $k < 0$.
- $0g = e$.

Finalmente se define $\langle g \rangle = \{kg : k \in \mathbb{Z}\}$.

- a) Demuestre que existe $g \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z} = \langle g \rangle$, donde en ESTE CASO $*$ sería la suma común y corriente.
- b) Demuestre que
 - $\langle g \rangle \neq \emptyset$
 - $\langle g \rangle \subseteq G$.
 - $\forall g_1, g_2 \in \langle g \rangle$, se tiene que $g_1 - g_2 \in \langle g \rangle$

Estas tres propiedades nos aseguran que $(\langle g \rangle, +)$ siempre es un grupo.

- c) Demuestre que si $f : (\langle g \rangle, +) \rightarrow (B, \Delta)$, es isomorfismo, entonces $\exists b \in B$ tal que $B = \langle b \rangle$.