

$$\underline{P \nmid I} \mid I) (P(E), n)$$

neutro: es el "e" que cumple $x \cap e = e \cap x = x$
 luego si tomamos $x = E$ (que vendría
 siendo el universo)

$$\Rightarrow \overset{(1)}{x \cap e} = \overset{(2)}{e \cap x} = x \leftarrow \text{OJO! A PRIORI HAY QUE REVISAR (1) Y (2)}$$

$\Rightarrow E$ es el neutro

OBS: EL NEUTRO DEBE SER EL MISMO PARA TODOS.

absorvente: es el "a" t.g. $\forall x, x \cap a = a \cap x = a$
 luego si tomamos $x = \phi$

$$\Rightarrow x \cap \phi = \phi \cap x = \phi \quad \forall x$$

$\Rightarrow \phi$ es el absorbente.

Es sabido que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
 $\Rightarrow \cap$ es asociativa.

Es sabido que $A \cap B = B \cap A$
 $\Rightarrow \cap$ es conmutativa

Obs: si yo hubiese visto primero que
 la intersección es conmutativa
 hubiese bastado que $x \cap e = x \quad \forall x$ para
 decir que E es el neutro (análogo para abs).

II) $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \max)$

Veamos primero que es conmutativo

$$\max(x, y) = \max(y, x)$$

si pues $\max$ devuelve el más grande, no le importa el orden.

neutro: $\max(x, 0) = x \quad \forall x$ pues
el 0 es el más chico, nunca le va
a ganar a nadie a lo más empatar
consigomismo. $\Rightarrow$ 0 es el neutro

absorvente: ¿Hay alguien que le gane a todos?

$$\exists y: \max \{x, y\} = y \quad \forall x ?$$

SÍ E! ∞ ! $\max \{+\infty, x\} = +\infty$

¿Porqué puedo tomar el infinito si eso no es un número?

Porque tu conjunto es $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

↑
E! $+\infty$ AHORA
E! UN ELEMENTO

* obs: $(\mathbb{N}, \max)$ NO TIENE ETO. ABSORVENTE.

ASOCIATIVIDAD:

$$\max \{x, \max \{y, z\}\} = \max \{\max \{x, y\}, z\}$$

si pues sea a $\dagger$ q

$$a = \max \{x, \max \{y, z\}\}$$

$$\Rightarrow a \geq x \quad \wedge \quad a \geq \max \{y, z\}$$

$$\Rightarrow a \geq y \quad \wedge \quad a \geq z$$

$$\Rightarrow \underbrace{a \geq x \quad \wedge \quad a \geq y \quad \wedge \quad a \geq z}$$

$$\underbrace{a \geq \max \{x, y\} \quad \wedge \quad a \geq z}$$

$$a \geq \max \{\max \{x, y\}, z\}$$

obs: si te marea ver $\max \{ \max \{ \dots \} \}$
puedes decir

$$x * y = \max \{ x, y \}$$

asociativo seria

$$\underbrace{(x * y) * z} = x * (y * z)$$

$$= \max \{ x, y \} * z$$

$$= \max \{ \max \{ x, y \}, z \}$$



$$x * \max \{ y, z \}$$

$$= \max \{ x, \max \{ y, z \} \}$$

({ Piedra, Papel, Tijera }, $\star$)

neutro

¿ Hay alguien que pierda o empate con todos? NO, pes es un ciclo

$\Rightarrow$ No hay neutro

¿ Pero porque preguntaste si había alguien que pierda si $\star$ dice el que gana?

Precisamente ser neutro es que

$$\exists Y : Y \star X = X \quad \forall X$$

↑
cualquier X le tiene que ganar o empatar a Y
 $\Rightarrow Y$ debe perder o empatar con todos

¿ Ah pero el papel le gana a la ~~tijera~~ piedra y la tijera al papel y la piedra a la tijera, todos le ganan a alguien?
YA PERO cualquier X le tiene que ganar

absorbente: usando el mismo argumento
NO HAY ELEMENTO ABSORBENTE, NO HAY
NADIE QUE LE GANE O EMPATE A TODOS

ASOCIATIVIDAD:

$$\begin{aligned}
 \text{piedra} \star (\text{papel} \star \text{tijera}) &= (\text{piedra} \star \text{papel}) \star \text{tijera} \\
 \underbrace{\text{piedra} \star \text{tijera}}_{\text{piedra}} &= \underbrace{\text{papel} \star \text{tijera}}_{\text{tijera}}
 \end{aligned}$$

CLARAMENTE NO!

$\Rightarrow$ NO ASOCIATIVA.

Obs: Cualquier conjunto "ciclo" NO TIENE neutro ni absorbente ni es asociativo, demuéstralo!

Claramente sí ES CONMUTATIVA
PORQUE NO IMPORTA EL ORDEN

TIGERA ★ PAPEL = PAPEL ★ TIGERA
(y así con todas las combinaciones)

P2] a) • conmutatividad $\Leftrightarrow (a,b) * (c,d) = (c,d) * (a,b)$

veamos si $*$ es conmutativo:

$$\begin{aligned} \rightarrow (a,b) * (c,d) &= (ac, bc+d) \\ \rightarrow (c,d) * (a,b) &= (ca, da+b) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \rightarrow (a,b) * (c,d) &= (ac, bc+d) \\ \rightarrow (c,d) * (a,b) &= (ca, da+b) \end{aligned}} \right\} \text{son diferentes!!}$$

$\therefore *$ NO es conmutativo

• asociatividad $\Leftrightarrow [(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (a,b) * [(c,d) * (e,f)]$

veamos si $*$ es asociativo:

$$\rightarrow [(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (ac, bc+d) * (e,f)$$

$$= (ace, (bc+d)e+f) = (ace, bce+de+f)$$

$$\rightarrow (a,b) * [(c,d) * (e,f)] = (a,b) * (ce, de+f)$$

$$= (ace, bce+de+f)$$

✓ usando
sólo la
definición
del
enunciado

! SON IGUALES!

$$\therefore [(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (a,b) * [(c,d) * (e,f)]$$

$\therefore *$ es asociativo //

b) EL neutro es alguien (llamémoslo " (e_1, e_2) ")

que cumple que

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{y } (e_1, e_2) * (a, b) = (a, b)$$

es decir, es como si no se hubiese "asterisgueado"

Por el,

ENTONCES: ^{primero} 1 necesitamos (e_1, e_2) tal que

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow (ae_1, be_1 + e_2) = (a, b)$$

$$\Rightarrow ae_1 = a \quad \wedge \quad be_1 + e_2 = b$$

↓

$$e_1 = 1$$

$$\Rightarrow b + e_2 = b$$

↓

$$e_2 = 0$$

veamos si se cumplen las 2 condiciones:

$$(e_1, e_2) * (a, b) = (1, 0) * (a, b) = (1a, 0 \cdot a + b) = (a, b) //$$

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b) * (1, 0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a, b) //$$

$\therefore (1, 0)$ es el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$.

c) Los elementos invertibles son aquellos para los cuales $\exists (a,b)^{-1}$ tal que

$$(a,b) * (a,b)^{-1} = (e_1, e_2) \quad \checkmark \text{ neutro}$$

ya vimos que el neutro es $(1,0)$, entonces

Tenemos que ver para que pares $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$\exists (a,b)^{-1}$ tal que

$$(a,b) * (a,b)^{-1} = (1,0).$$

En efecto: llamemos (x,y) a $(a,b)^{-1}$

$$(a,b) * (x,y) = (1,0)$$

$$\Rightarrow (ax, bx+y) = (1,0)$$

$$\Rightarrow ax = 1 \quad \wedge \quad bx+y = 0$$

$$\downarrow$$
$$x = \frac{1}{a}$$

$$\downarrow$$
$$y = -bx = -\frac{b}{a}$$

$$\therefore \text{ si existe } (a,b)^{-1}, \quad (a,b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right)$$

Pero para quienes existe? o más bien para quienes no? solo tendríamos problemas si $a=0$

$\therefore$ todos los pares (a,b) con $a \neq 0$ tienen

inverso y vale $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right) //$

d) Los elementos IDEMPOTENTES son aquellos que cumplen que $(a,b) * (a,b) = (a,b)$

veamos quienes son: $(a,b) * (a,b) = (a,b)$

$$\Rightarrow (a^2, ab+b) = (a,b)$$

$$\Rightarrow a^2 = a \quad \wedge \quad ab+b = b$$

$\downarrow$

$$a = 1$$

(único elemento

idempotente en

$\mathbb{R}$ con la

multiplicación)

$\downarrow$

$$b+b = b$$

$$2b = b$$

$$b = 0$$

$\therefore$ el único elemento IDEMPOTENTE es el neutro $(1,0)$. //

⊛ NOTEMOS que el neutro siempre es IDEMPOTENTE ya que cumple que $(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b)$

PARA TODO (a,b) , en particular para (e_1, e_2)

$$\Rightarrow (e_1, e_2) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2).$$

un pequeño error

también se cumple para $a=0$ que
 $a^2 = a$

$$\begin{aligned}\text{En ese caso } ab + b \\ &= 0b + b \\ &= b\end{aligned}$$

es decir para cualquier b
se cumple la idempotencia si $a=0$
en otras palabras

$$x \text{ idempotente} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1, 0) \\ x \in \bigcup_{b \in \mathbb{R}} (0, b) \text{ con } b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

//

P3] $B = \{x \in A \mid a * x = x * a\}$ $a \in A$ fijo

a) P.D.Q: $(\forall x, y \in B) \quad x * y \in B$

P.D.Q $(x * y) * a = a * (x * y) \quad \forall x, y \in B$

En efecto: $(x * y) * a = x * (y * a) \quad (pg' * \text{es asociativo})$
 $= x * (a * y) \quad (pg' \ y \in B)$
 $= (x * a) * y \quad (pg' * \text{asocia})$
 $= (a * x) * y \quad (pg' \ x \in B)$
 $= a * (x * y) \quad (pg' * \text{asocia})$

b) P.D.Q: si e es neutro $\Rightarrow e \in B$

En efecto: si e es neutro

$e * x = x \quad \wedge \quad x * e = x \quad \forall x$

definición neutro

en particular $e * a = a \quad \wedge \quad a * e = a$

$\Rightarrow e * a = a * e$

$\Rightarrow e \in B //$

c) P.D.Q : $\exists x \in B$ tiene inverso $\Rightarrow x^{-1} \in B$

En efecto : $x \in B$ tiene inverso

$$\Leftrightarrow \exists x^{-1} \text{ t.q. } \begin{cases} x * x^{-1} = e \\ x^{-1} * x = e \end{cases}$$

P.D.Q $x^{-1} \in B$

$$\Leftrightarrow x^{-1} * a = a * x^{-1}$$

En efecto : $x^{-1} * a = (x^{-1} * a) * e$ $\leftarrow$ el neutro no hace nada

$$= x^{-1} * (a * e)$$

$\leftarrow$ * asocia

$$= x^{-1} * (a * (x * x^{-1}))$$

$\leftarrow e = x^{-1} * x$

$$= x^{-1} * ((a * x) * x^{-1})$$

$\leftarrow$ * asocia

$$= x^{-1} * ((x * a) * x^{-1})$$

$\leftarrow x \in B$

$$= (x^{-1} * x) * (a * x^{-1})$$

$\leftarrow$ * asocia

$$= e * (a * x^{-1})$$

$\leftarrow e = x^{-1} * x$

$$= a * x^{-1}$$

$\leftarrow$ el neutro "no hace nada"

$$\therefore x^{-1} * a = a * x^{-1}$$

$$\therefore x^{-1} \in B //$$

P4

Practicamente lo único que sabemos de NO-NUMERABILIDAD es:

$\mathbb{R}$ NO es NUMERABLE
 $[0, 1)$ NO es NUMERABLE

ASIQUE HABRA QUE USAR ESO...

NOTEMOS QUE $(a, b) \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow |(a, b)| \leq |\mathbb{R}|$

Solo faltaria ver que $|\mathbb{R}| \leq |(a, b)|$

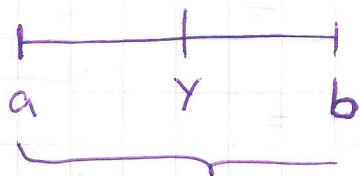
PDA: $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ inyectiva.

pero eso es complicado... quizás si en vez de $\mathbb{R}$ trabajamos con $[0, 1)$

PDA $\exists f: [0, 1) \rightarrow (a, b)$ inyectiva.

EL SIGUIENTE ARGUMENTO ES UN ARGUMENTO QUE LES JURO VOLVERÁN A USAR MUCHAS VECES EN LA UNIVERSIDAD.

¿Como puedo describir un elemento de un intervalo?



este segmento mide $b-a$
cual quier elemento que este entremedio
es de la forma $y = a + z$
con $0 < z < b-a$

y una forma de escribir

$$0 < z < b-a \quad \text{es} \quad z = x(b-a) \\ \text{con } x \in [0, 1]$$

what! piensalo si yo soy más chico
que $b-a$ es porque soy ALGUNA
FRACCIÓN de $b-a$ (LA MITAD, UN TERCIO,
SIETE OCTAVOS, algo menor que 1)

$$¿2 < 4? \quad \text{sí pues } 2 = \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$¿7 < 10? \quad \text{sí pues } 7 = 10 \cdot \frac{7}{10}$$

$$\text{así } f: [0, 1] \rightarrow (a, b) \\ x \mapsto a + x(b-a) \\ \text{ESTÁ BIEN DEFINIDA!} \quad \text{!!}$$

NO! pues $x=0 \rightarrow a + 0(b-a) = a$ que
NO PERTENECE A (a, b) . HAY QUE TENER
CUIDADO CON ESOS DETALLES.

pero si $[0, 1]$ es no-numerable
 $(0, 1)$ tampoco es numerable
si es lo mismo sin un elemento

$$f: (0, 1) \rightarrow (a, b) \\ x \mapsto a + x(b-a)$$

AHORASÍ ESTÁ BIEN DEFINIDA,
si es inyectiva GANAMOS.

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \cancel{a} + x(\cancel{b-a}) = \cancel{a} + y(\cancel{b-a}) \\ \boxed{x=y}$$

∴ f inyectiva.

$$\Rightarrow |(0, 1)| = |[0, 1]| = |\mathbb{R}| \leq |(a, b)| \leq |\mathbb{R}|$$

$$\Rightarrow |(a, b)| = |\mathbb{R}| //$$

b) Como $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

↑
unión numerable

si todos los A_i fuesen numerables o finitos
tendría • unión numerable de conjuntos
numerables lo que es numerable
pero A es no-numerable

$\Rightarrow$ Alguno no es numerable
 $= \exists k \in \mathbb{N}$ t.s. A_k es infinito no-numerable.

• = A lo más

c) $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}$

$\Rightarrow$ sus elementos son de la forma

$(0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$
todas las posiciones tienen un 0 o un 1

si $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ fuese numerable uno podría
armar una "lista" con todos los elementos

1 = $(0, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots)$
2 = $(0, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots)$
3 = $(1, 0, 1, \dots)$

y así infinitamente, pero yo
puedo armar un ~~no~~ número que
no esté en esa lista.

Como el 1er número tiene un 0
en la primera posición mi nuevo número
tiene un 1, como el segundo tiene
un 1 en la segunda el nuevo
tendrá un 0 y así sucesivamente

¿ y por qué ese elemento no va a estar si mi lista es infinita?

a ver claramente no es el primero porque el primero tiene un 0 en la primera posición y este tiene un 1, y tampoco es el 2^{do} porque el segundo tiene un 1 en la segunda posición y este tiene un 0, ah entonces... y así uno ve que no es el 3^{ro} ni el 4^{to} ni ninguno!

mentira sí es el i -ésimo ¿seguro, porque el i -ésimo tiene un 0 (o bien un 1) en la i -ésima posición y este ~~es~~ tiene un 1 (o bien un 0) entonces parece que es verdad que no está en la lista...

$\Rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ NO ES NUMERABLE.

P4 a) Las "Partes de A" (PCA) es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Digamos que A tiene n elementos. ~~esto~~ ^{entonces} ~~incluyen~~ las partes de A incluyen:

→ Los subconjuntos de 0 elementos ($\emptyset$)

→ los subconjuntos de 1 elemento

→ . . .

→ los subconjuntos de n elementos

Pero los subconjuntos de k elementos se pueden escribir como $\binom{n}{k}$ según el enunciado.

Entonces nosotros queremos saber cuántos subconjuntos de A existen en total ($|P(A)|$)

Esto será

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$\nwarrow$ los de 0 elementos $\nwarrow$ los de 1 elemento $\nwarrow$ los de 2 elementos $\nwarrow$ los de n elementos

$$\Rightarrow |P(A)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Binomio de Newton.

Pero si A tiene n elementos, $|A| = n$

$$\therefore |P(A)| = 2^{|A|} //$$

b) P.D.Q $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n$

Por (a), esto es lo mismo que decir

P.D.Q $\forall A \text{ finito} \quad |A| < |P(A)|$

Sea A un conjunto finito.

Entonces A se puede escribir como $\{a_1, \dots, a_n\}$

Pero entonces las partes de A incluyen al menos

a $A, \emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ más todas las combinaciones de elementos. y por lo tanto, $P(A)$ siempre tiene más elementos que A

$$\Rightarrow |A| < |P(A)|$$

$$\Rightarrow n < 2^n //$$

- Demuestre que el conjunto $\{\dots, -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9, \dots\}$ es numerable.

Sabemos que el conjunto es infinito, y como $\mathbb{N}$ es el infinito "más chico", se tiene que $|\mathbb{N}| \leq |\{\dots, -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9, \dots\}|$. Pero por otro lado $\{\dots, -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9, \dots\} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow |\{\dots, -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9, \dots\}| \leq |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. Como se tienen ambas desigualdades, se concluye que es numerable.

Obs: otra forma de hacerlo era notando que $f : \{0, 1, 4, 9, \dots\} \longrightarrow \mathbb{N}$
 $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$ es biyección, por lo que $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$ es numerable, luego $\{1, 4, 9, \dots\}$ es numerable y como $g : \{1, 4, 9, \dots\} \longrightarrow \{\dots, -9, -4, -1\}$
 $x \longmapsto g(x) = -x$ es biyección se concluye que $\{\dots, -9, -4, -1\}$ es numerable. Finalmente unión de dos conjuntos numerables es numerable y se concluye.