

P1) Veamos que $\exists f: A \cup B \rightarrow A \cup C$
biyectiva.

Como $|B| = |C|$ sabemos que
 $\exists g: B \rightarrow C$
biyectiva.

Tenemos que CONSTRUIR f a
partir de g

$f: A \cup B$ es decir toma elementos
ya sea en A ó en B
y llega a $A \cup C$, es intuitivo
que la función que nos sirve
sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

¿Por qué?

la intuición viene de que yo
sé que puedo "cubrir" C con B
y ~~de~~ claramente A "cubre" A

Al final en todos los problemas
de cardinalidad el razonamiento

es parecido a qué función, cubre el espacio de llegada? Bueno analizo como se relaciona el espacio de partida con el del llegada.

Entonces veamos efectivamente f es biyectiva.

Injectividad

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Bueno 2 casos si $f(x) \in A \cup B$
 $\Rightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B$

y porque no puede estar en ambos. En principio obvio que podría PERO $A \cap C = \emptyset$!

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &\in C \\ \text{como } f(x) &= g(x) \\ f(x) &= f(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = g(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y}$$

pues g
biyectiva
 $\Rightarrow$ inyectiva.

$$\begin{aligned} f(x) &\in A \\ \text{como } f(x) &= x \\ f(y) &= f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x}$$

$\therefore f$ inyectiva.

Sobreyectividad.

Sea $y \in A \cup C$

$$\Rightarrow y \in A \vee y \in C$$

bueno si $y \in A$, basta tomar al mismo y

$$\Rightarrow f(y) = y !$$

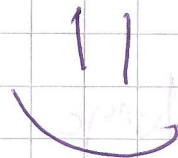
si $y \in B$, queremos alguien de la forma $g(x) = y$
ah! pero g es biyectiva $\Rightarrow$ sobreyectiva

$$\therefore \exists x \in B \text{ t.q. } g(x) = y = f(x)$$

$\Rightarrow f$ sobreyectiva.

$\therefore f$ biyectiva

$$\therefore |A \cup C| = |A \cup B| //$$



P3 sabemos que $\mathcal{C} = \{C : C \text{ es una circunferencia de centro } (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \text{ y radio } r \in \mathbb{Q}^+\}$

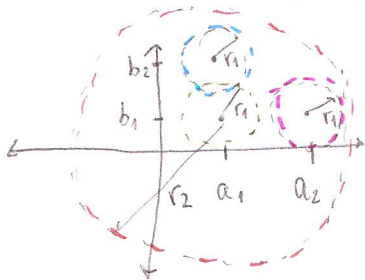
Para cualquier radio $r \in \mathbb{Q}^+$, existen infinitas circunferencias de centro $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, ya que los racionales son infinitos.

Podemos definir $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathcal{C}$

$$(a,b,r) \mapsto f(a,b,r) = C$$

donde las primeras dos coordenadas definen el centro de la circunferencia y r el radio.

f es claramente biyectiva ya que para cada (a,b,r) existe una única circunferencia (inyectividad)★ y a la vez, cualquier circunferencia $C \in \mathcal{C}$ se puede definir con esos 3 parámetros (sobreyectividad).



★ si tenemos una circunferencia

C_1 de centro (a_1, b_1) y radio r_1 :

→ si cambiamos el radio a r_2 , nos queda

$$C_2 \neq C_1$$

→ si cambiamos a_1 a a_2 , nos queda $C_3 \neq C_1 \neq C_2$

→ si cambiamos b_1 a b_2 , nos queda $C_4 \neq C_1 \neq C_2 \neq C_3$

ya que $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ es biyectiva

$$|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+| = |\mathbb{C}|$$

$$\text{Pero } |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$$

$$\Rightarrow |\mathbb{C}| = |\mathbb{N}|$$

Pero nosotros queremos demostrar que si

$$D = \{(P, Q) : P \text{ y } Q \text{ extremos de diámetros horizontales de circunferencias en } \mathbb{C}\}$$

entonces :

$$|D| = |\mathbb{N}|$$

Pero como ya sabemos que $\mathbb{C}$ es numerable, sólo tenemos que demostrar que $|D| = |\mathbb{C}|$

Sea $g: \mathbb{C} \rightarrow D$ que toma una circunferencia en $\mathbb{C}$ y

entrega los puntos extremos de su diámetro horizontal.

Esta función también es biyectiva!

inyectividad: cada circunferencia tiene un sólo par de puntos asociados

sobreyectividad: Para cualquier par de puntos $(p_1, p_2), (q_1, q_2)$ en D (dos puntos con coordenadas racionales y $p_2 = q_2$), existe una única circunferencia determinada por esos puntos
(de centro $\left(\frac{p_1 + q_1}{2}, p_2\right)$ y radio $\frac{|p_1 - q_1|}{2}$)

$$\therefore |C| = |D|$$

$\Rightarrow D$ numerable //

PS) Recordemos que la pre-imagen
se "porta muy bien" con
las operaciones ya sea $\cup$, $\cap$, $()^c$
la que nos va a interesar
esta vez

$$U f^{-1}(x_i) = f^{-1}(U x_i)$$

¿y porque eso?

ES UTIL RECORDAR QUE TODO
CONJUNTO SE PUEDE ESCRIBIR
COMO LA UNIÓN DE SUS SINGLETONS

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$$

← $\mathbb{R}$ ES NO-NUMERABLE
⇒ ESTA UNIÓN ES
NO NUMERABLE

$$\emptyset = \bigcup_{x \in \emptyset} \{x\}$$

PERO
 $\mathbb{N}$ y $\emptyset$ son
numerales,
por lo que
esta unión
es numerable!

$$\mathbb{N} = \bigcup_{x \in \mathbb{N}} \{x\}$$

UNIÓN NUMERABLE DE
CONJUNTOS NUMERALES ES NUMERABLE.

Sabiendo eso esta pregunta
se vuelve harto más simple
como

$$f: A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A = f^{-1}(\mathbb{N})$$

~~$$\Rightarrow A = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\})$$~~

$$\Rightarrow A = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right)$$

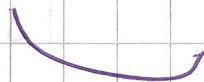
$$\Rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\{n\})$$

unión
numerable

conjuntos
numerales

Numerable!

||



- **P4** Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ una función.

a) Demuestre que si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.

b) ¿Qué ocurre si A es infinito y $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es finito?

R: Analizamos de la misma forma que antes $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(n)$ al ser unión numerable de conjuntos finitos tiene que ser finita o numerable. Se agrega la opción de finito pues puede ser que $f(A)$ sea finito y que el resto de los $n \in \mathbb{N} \setminus f(A)$ cumplan que $f^{-1}(n) = \emptyset$, sin embargo por hipótesis se concluye.

- **P5** Determine el cardinal de las fracciones cuyo denominador es potencia de 2.

R: Por definición del conjunto este está contenido en $\mathbb{Q}$, por lo que su cardinal es menor o igual al de $\mathbb{Q}$, además es claro que es infinito por lo que su cardinal es mayor o igual al de $\mathbb{N}$, y como $|\mathbb{Q}| = \mathbb{N}$, se concluye.

P2)
$$\sum_{K=0}^n (1-x)^K = \sum_{K=0}^n (-1)^K \binom{n+1}{K+1} x^K$$

mmm... me suena a binomio de Newton

Pero ese $\binom{n+1}{K+1}$ ← debería ser un K
¡Cambio de índice!

$$\sum_{K=0}^n (-1)^K \binom{n+1}{K+1} x^K = \sum_{K=1}^{n+1} (-1)^{K-1} \binom{n+1}{K} x^{K-1}$$

$\uparrow$ pero los límites suben
AMBOS

$\nwarrow \nearrow$ dentro de la sumatoria los K bajan

ENTONCES LA PARTE DE ARRIBA DE LA SUMATORIA ES IGUAL A LA PARTE DE ARRIBA del COEFICIENTE, y la de Abajo es un K ESTAMOS CASI LISTOS

pero el K parte de 1 $\parallel$
Bueno le agregamos el término 0
(pero también hay que quitárselo)

$$= \sum_{K=0}^{n+1} (-1)^{\overbrace{K-1}} \binom{n+1}{\overbrace{K}} x^{\overbrace{K-1}} - \underbrace{(-1)^{0-1}}_{-1} \underbrace{\binom{n+1}{0}}_1 \underbrace{x^{0-1}}_{x^{-1}}$$

$$= \sum_{K=0}^{n+1} (-x)^K \cdot \underbrace{(-x)^{-1}}_{\text{NO TIENE } K} \binom{n+1}{K} + x^{-1}$$

$$= (-x)^{-1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-x)^k \boxed{?}^{n+1-k} + x^{-1}$$

SOLO FALTA
ESO

PERO SI ESTÁ
ES UN 1 

$$= (-x)^{-1} (1-x)^{n+1} + x^{-1}$$

$$= \frac{-(1-x)^{n+1} + 1}{x}$$

$$= \frac{-(1-x)^{n+1} + 1}{1 - (1-x)} = \sum_{k=0}^n (1-x)^k$$

P3] a) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \star$

trabajemos primero el $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{(n-k)! k!}$

$$= \frac{\cancel{k} n!}{(n-k)! \cancel{k} (k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)! (k-1)!}$$

me gustaría formar un nuevo combinatorio

para ello $n-k = x - (k-1)$

$$n - \cancel{k} = x - \cancel{k} + 1$$

$$\boxed{n-1 = x}$$

$\Rightarrow$ si arriba hubiese un $(n-1)!$
lo tendríamos... pero $n! = n \cdot (n-1)!$ //

$$\Rightarrow \star = \sum_{k=1}^n n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

no depende de k

$$= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Y RAZONAMOS IGUAL A LA P2]

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k \cdot p (1-p)^{n-1-k}$$

$$= np \sum_{\boxed{k=0}}^{\boxed{n-1}} \binom{\boxed{n-1}}{\boxed{k}} p^{\boxed{k}} (1-p)^{\boxed{n-1-k}}$$

✓

$$= np (1-p+p)^{n-1}$$

$$= np //$$

P4)
$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} (x^2)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{18-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} x^{2k} \cdot x^{-1(18-k)} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} x^{3k-18}$$

a) Término constante $\Leftrightarrow x^0$

Entonces necesitamos que $3k-18=0$

$$\Rightarrow 3k=18 \Rightarrow \underline{k=6}$$

Entonces el término constante es el sexto de la sumatoria:

$$\begin{aligned} \binom{18}{6} x^{3 \cdot 6 - 18} &= \binom{18}{6} = \frac{18!}{6!(18-6)!} \\ &= \frac{18!}{6!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17 = \underline{18564} \end{aligned}$$

b)

Ya que la sumatoria va de 0 a 18, hay 19 términos y por lo tanto hay sólo un término central, que es el término 9. OJO que en este caso justo calza con que el término 9 es el x^9 , pero eso no necesariamente es así. El término 9 es el que corresponde a $k=9$

$$\text{término } 9: \binom{18}{9} x^{3 \cdot 9 - 18} = \frac{18!}{9!9!} x^9 = \frac{18 \cdot \dots \cdot 10}{9!} = 48620 x^9$$

c) necesitamos que $3K - 18 = 6$ para tener x^6

$$\Rightarrow 3K = 24 \Rightarrow K = 8$$

Entonces el valor del coeficiente de x^6 es

$$= \frac{18!}{8!(18-8)!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 17 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 = \boxed{4862}$$