MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: 4 de Agosto de 2018.

Auxiliar 9: Binomio de Newton y Numerabilidad

- $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|$
- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
- Si A es infinito, entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$
- $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables.
- La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
- Si A, B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

P1. Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ y $|B| = |C|$. Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$.

P2. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional. Es decir, $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C$ es una circunferencia de centro (a, b) y radio r con $a, b, r \in \mathbb{Q}$. Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P, Q), donde P y Q son los extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de $\mathcal{C}$, es infinito numerable.

P3. Sea A un conjunto y $f : A \to \mathbb{N}$ una función.

(a) Demuestre que si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.

(b) ¿Qué ocurre si A es infinito y $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es finito?

P4. Demuestre, sin usar inducción, que

a) $(\forall x \neq 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = pn$

P5. En el desarrollo de $(x^2 + \frac{1}{x})^{18}$ encuentre:

(a) El término constante.

(b) El término central.

(c) El valor del coeficiente de x^6.

P6. Determine el cardinal de las fracciones cuyo denominador es potencia de 2.