MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: Viernes 11 de Mayo.

Pauta auxiliar 8: Repaso + Cardinalidad

P1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b \equiv_2 c + 3d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
R:

- Refleja:

$$(a, b)\mathcal{R}(a, b) \Leftrightarrow a + b \equiv_2 a + 3b \Leftrightarrow a + b - a - 3b \text{ es par } \Leftrightarrow -2b \text{ es par } \Leftrightarrow V$$

- Simétrica:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b - c - 3d = 2k \Leftrightarrow a + b - c - 3d + 2b + 2d = 2k + 2b + 2d$$
$$\Leftrightarrow c + d - a - 3b = 2k' \Leftrightarrow (c, d)\mathcal{R}(a, b)$$

- Transitiva:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \wedge (c, d)\mathcal{R}(e, f) \Leftrightarrow a + b - c - 3d = 2k \wedge c + d - e - 3f = 2k'$$
$$\Leftrightarrow a + b - c - 3d + c + d - e - 3f = 2(k + k')$$
$$\Leftrightarrow a + b - e - 3f = 2(k + k') + 2d = 2k'' \Leftrightarrow (a, b)\mathcal{R}(e, f)$$

Como la relación es refleja, simétrica y transitiva, es de equivalencia.

(b) Muestre que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.
R: $[(0, 0)] = \{(a, b) : (a, b)\mathcal{R}(0, 0)\} = \{(a, b) : a + b - 0 - 30 = 2k\} = \{(a, b) : a + b \text{ par }\}$
$[(1, 0)] = \{(a, b) : (a, b)\mathcal{R}(1, 0)\} = \{(a, b) : a + b - 1 - 30 = 2k\} = \{(a, b) : a + b \text{ impar }\}$
Luego $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = [(0, 0)] \cup [(1, 0)]$, pues si tomamos cualquier elemento de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, será de la forma (a, b) y necesariamente se cumplirá que $a + b$ es par o impar, no hay otra posibilidad.
Finalmente $[(0, 0)] \cap [(1, 0)] = \emptyset$ pues uno tiene los pares ordenados que suman par y el otro los que suman impar, es imposible que ocurra ambas cosas al mismo tiempo.

(c) Determine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
R: La definición de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{R}$ es la partición que generan las clases de equivalencia, esto es que la unión genere todo y que no intersecten, que es precisamente lo que demostramos en la parte anterior por lo que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{[0, 0], [(1, 0)]\}$

P2. Sean E_1, E_2 dos conjuntos no vacíos y $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectivamente.

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ definida en $E_1 \times E_2$ por $(x,y)\mathcal{R}(u,v) \Leftrightarrow [x\mathcal{R}_1 u \wedge y\mathcal{R}_2 v]$ es una relación de orden en $E_1 \times E_2$.
R:

- Refleja: $(a,b)\mathcal{R}(a,b) \Leftrightarrow a\mathcal{R}_1 a \wedge b\mathcal{R}_2 b \Leftrightarrow V$ pues tanto $\mathcal{R}_1$ como $\mathcal{R}_2$ son reflejas.
- Antisimétrica: $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \wedge (c,d)\mathcal{R}(a,b) \Rightarrow a\mathcal{R}_1 c \wedge c\mathcal{R}_1 a \wedge b\mathcal{R}_2 d \wedge d\mathcal{R}_2 b \Rightarrow a = c \wedge b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$ donde la primera implicancia fue por que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son antisimétricas.
- Transitiva: $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow a\mathcal{R}_1 c \wedge b\mathcal{R}_2 d \wedge c\mathcal{R}_1 e \wedge d\mathcal{R}_2 f \Rightarrow a\mathcal{R}_1 e \wedge b\mathcal{R}_2 f \Rightarrow (a,b)\mathcal{R}(e,f)$ donde la primera implicancia fue por que $\mathcal{R}_1$y $\mathcal{R}_2$ son transitivas.

(b) Si tanto E_1 como E_2 tienen al menos dos elementos cada uno, pruebe que $\mathcal{R}$ es sólo una relación de orden parcial.
R: Tomemos $\{a,c\} \subseteq E_1$ y $\{b,d\} \subseteq E_2$ con $a \neq c \wedge b \neq d$, notemos que si se llega a cumplir que $(a \not\mathcal{R}_1 c \wedge c \not\mathcal{R}_1 a) \vee (b \not\mathcal{R}_2 d \wedge d \not\mathcal{R}_2 b)$, entonces es directo que $(a,b) \not\mathcal{R}(c,d)$ ni $(c,d) \not\mathcal{R}(a,b)$. Por el otro lado si se llega a cumplir que $a\mathcal{R}_1 c \wedge b\mathcal{R}_2 d \Rightarrow c \not\mathcal{R}_1 a \vee d \not\mathcal{R}_2 b$ pues la relaciones son antisimétricas, si llegasen a relacionarse para el otro lado tendrían que ser iguales así $(c,b) \not\mathcal{R}(a,d) \wedge (a,d) \not\mathcal{R}(c,b)$, los otros casos son análogos y como siempre se concluye que hay un par que no se relaciona ya sea para un lado o para el otro, se concluye que no es de orden total.

P3. Calcule utilizando fracciones parciales $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$
R: $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)} = \sum_{k=1}^{n}(n+k^2)\sum_{j=1}^{k^2}\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}$. Busquemos A, B tales que

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)} = \frac{A}{(n+j-1)} + \frac{B}{(n+j)} = \frac{A(n+j)+B(n+j-1)}{(n+j-1)(n+j)} = \frac{(A+B)j+(A+B)n-B}{(n+j-1)(n+j)}$$

, así los sistemas que quedan son

$$A + B = 0 \wedge (A+B)n - B = 1$$

, reemplazando la primera en la segunda queda $B = -1 \wedge A = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(n+k^2)\sum_{j=1}^{k^2}\frac{1}{(n+j-1)(n+j)} &= \sum_{k=1}^{n}(n+k^2)\sum_{j=1}^{k^2}\frac{1}{(n+j-1)} - \frac{1}{(n+j)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+k^2)\left(\frac{1}{(n+1-1)} - \frac{1}{(n+k^2)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n} - \frac{n+k^2}{(n+k^2)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}1 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

P4. Calcule las siguientes sumas

i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{k}{2}\binom{j}{j-2}$

R:

$$\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{k}{2}\binom{j}{j-2}=\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{j}{j-2}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k!}{2!(k-2)!}\sum_{j=2}^{n+1}\frac{j!}{(j-2)!(j-(j-2))!}$$

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k(k-1)}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\frac{j(j-1)}{2}=\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k(k-1)}{2}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)k}{2}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{2}\right)^2=$$

$$\frac{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{4}$$

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{4n-2k}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\binom{4n-2k}{j}$

R: Tenemos algo de estilo una suma con un coeficiente binomial y algo elevado a k esto grita pensar en binomio de newton, siempre hay que revisar que 1) parta desde 0, 2) el límite superior de la suma sea igual a la parte superior del coeficiente, 3) haya un $x^k y^{n-k}$ y si no está recuerde que siempre hay un 1 escondido. Así

$$\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{4n-2k}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\binom{4n-2k}{j}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\sum_{j=0}^{4n-2k}\binom{4n-2k}{j}1^j1^{4n-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}(1+1)^{4n-2k}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{2n-k}(-1)^k4^{2n-k}$$

A uno le encantaría llegar y utilizar el binomio el único problema es la parte de abajo del coeficiente pero recordemos que $\binom{a}{b}=\frac{a}{(a-b)!b!}=\frac{a}{(a-b)!(a-(a-b)!}=\binom{a}{a-b}$.

Así:

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{2n-k}(-1)^k4^{2n-k}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k4^{2n-k}=(4-1)^{2n}=9^n$$

P5. Sean A, B, C conjuntos finitos, demuestre que:

i) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

R:

$$|A|+|B|-|A\cap B|=|A|+|B\setminus(A\cap B)|=|A\cup(B\setminus(A\cap B)|=|A\cup B|$$

Donde en el primer igual se utilizó que $A\cap B\subseteq B$ y el cardinal de la diferencia cuando quito un subconjunto; mientras que en el segundo igual se usó el cardinal de una unión disjunta (revisen que es disjunto!), finalmente se concluyó utilizando que esos dos conjuntos son iguales (revisarlo!!).

ii) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
R:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (A \cap B)| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|(A \cap C)| + |(A \cap B)| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|(A \cap C)| + |(A \cap B)| - |A \cap C \cap B)|) \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}$$

Notemos que tiene mucho sentido el resultado, yo estoy contando todos los elementos que están en A o en B o en C, eso es todos los de A + los de B + los de C, el problema es que los que estában en A y en C, en A y en B y en B y C, los conté dos veces así que se los quito una vez, pero si llegaba a haber un elemento en los tres lo quité dos veces por lo que se lo tengo que agregar de nuevo.

P6. Sean A y B conjuntos no vacíos, no necesariamente finitos. Demuestre que $|A \times B| = |B \times A|$.
R: En el caso finito es bastante simple pues sabemos calcular esos cardinales: $|A \times B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |B \times A|$.
Sin embargo para el caso infinito hay que hacerlo por definición, para ello consideremos la función

$$\begin{aligned}
f : A \times B &\longrightarrow B \times A \\
(a, b) &\longmapsto f((a, b)) = (b, a)
\end{aligned}$$

La cual es biyectiva pues:

- Inyectiva: $f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow (b, a) = (d, c) \Rightarrow b = d \wedge a = c \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.
- Sobreyectiva: Si tomamos un $y = (b, a) \in B \times A$, se tendrá que tomando $x = (a, b)$ se cumplirá que $f(x) = y$