MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: Viernes 11 de Mayo.

Auxiliar 8: Repaso + Cardinalidad

- **Coeficiente Binomial:** $\binom{n}{k}$ es la cantidad de subconjuntos de tamaño k que hay en un conjunto de n elementos.
- $\forall 0 \leq k \leq n \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- **Binomio de Newton:** $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$
- $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|$
- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
- Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$.
- Si A es infinito, entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$
- $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables.
- La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
- Si A, B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

P1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a + b \equiv_2 c + 3d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(b) Muestre que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

(c) Determine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

P2. Sean E_1, E_2 dos conjuntos no vacíos y $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectivamente.

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ definida en $E_1 \times E_2$ por $(x,y)\mathcal{R}(u,v) \Leftrightarrow [x\mathcal{R}_1 u \wedge y\mathcal{R}_2 v]$ es una relación de orden en $E_1 \times E_2$.

(b) Si tanto E_1 como E_2 tienen al menos dos elementos cada uno, pruebe que $\mathcal{R}$ es sólo una relación de orden parcial.

P3. Calcule utilizando fracciones parciales $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k^2} \frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$

P4. Calcule las siguientes sumas

i) $$\sum_{k=2}^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} \binom{k}{2} \binom{j}{j-2}$$

ii) $$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{4n-2k} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \binom{4n-2k}{j}$$

P5. Sean A, B, C conjuntos finitos, demuestre que:

i) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

ii) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

P6. Sean A y B conjuntos no vacíos, no necesariamente finitos. Demuestre que $|A \times B| = |B \times A|$.