MA1101-5 Introducción Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: JuAN PEdro Ross
Fecha: 15 de Junio de 2018

Repaso semestral

P1. a) **[C1 2018-1]** Para todo $n \in \mathbb{N}$, se define

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ a_{n-1} + 4 & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n-1} - 2 & \text{si } n \text{ es par y } n \geq 2, \end{cases}$$

Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

b) **[CR 2007-1]** Demuestre usando inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \ \forall n \geq 1.$$

c) **[CR 2007-1]** Calcule la suma

$$S = 1 + \frac{1+8}{4} + \frac{1+8+27}{9} + \cdots + \frac{1+8+27+\cdots+n^3}{n^2}$$

P2. a) **[C3 2018-1]** Estudie la inyectividad, sobreyectividad y biyectivad de la siguiente función. Justifique sus respuestas.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$

b) **[CR 2009-1]** Considere la relación $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$$

Demuestre que es una relación de equivalencia y calcule explicitamente la clase $[(0, 1)]$.

c) **[CR 2009-1]** Demuestre que está bien definida y estudie la inyectividad,sobreyectividad y biyectivad de la siguiente función. Justifique sus respuestas.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \mathcal{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [(x, y)] &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$

P3. Sea $E \neq \emptyset$, $f : E \longrightarrow E$ una función. Demuestre que:

a) **[CR 2014-1]** f es biyectiva $\Longleftrightarrow f \circ f$ es biyectiva.

b) **[CR 2014-1]** $\forall A \subseteq E, f(A) = A \Rightarrow f = id_E$.

c) **[C3 2018-1]** Demuestre que si $\exists h : E \longrightarrow E$, tq $h \circ f \circ h$ es biyectiva $\Rightarrow f$ es biyectiva.