

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell.

Auxiliar: Juan Pedro Ross.

Fecha: Domingo 6 de Mayo



Guía Control 4

P1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b \equiv_2 c + 3d$$

- (a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
- (b) Muestre que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.
- (c) Determine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \mathcal{R}$.

P2. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $a \geq 1$ y $b \geq 2$ se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow b|ax + y, \text{ es decir, } b \text{ divide a } ax + y$$

- (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $b|(a + 1)$.
- (b) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b|(a^2 - 1)$.
- (c) Demuestre que para $a = 3$ y $b = 4$, $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia y encuentre $\mathbb{Z} / \mathcal{R}$

P3. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $\mathcal{R}$ una relación de orden en B . Se define la relación Ω en A como $x\Omega y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(y)$. Demuestre que Ω es una relación de orden en A si y solo si f es inyectiva.

P4. (a) Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ψ dada por: $x\Psi y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$.

- i. Demuestre que Ψ es una relación de orden.
- ii. Indique si es una relación de orden parcial o total. Justifique.

(b) Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ como $x\Phi y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{Z}$.

- i. Demuestre que Φ es una relación de equivalencia.
- ii. Dado $p \in \mathbb{Z}$, calcule la clase de equivalencia $[p]_{\Phi}$.
- iii. Demuestre que $\mathbb{R} / \Phi = \{[x] : x \in [0, 1)\}$

P5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y).$$

Demuestre que

$$\sum_{i=1}^n f\left(1 + \frac{1}{i}\right) = f(n + 1).$$

P6. Para $n \in \mathbb{N}$ $b, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, calcule $1 + (1 + b)q + (1 + b + b^2)q^2 + \dots + (1 + b + \dots + b^n)q^n$.

P7. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Calcule:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3 + (-1)^k)^k}$$

P8. En esta pregunta vamos a aprender a calcular sumatorias por el método de fracciones parciales, esto es muy útil cuando tenemos sumas de fracciones que tienen multiplicaciones en el numerador, la idea es separar esa multiplicación en una resta y luego utilizar una suma telescópica o algo parecido. Para esto tendrá que creer que si $a_0 + a_1j + a_2j^2 + \dots + a_pj^p = b_0 + b_1j + b_2j^2 + \dots + b_pj^p$ cuando j se está moviendo entre varios valores, la única posibilidad es que $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_p = b_p$ (esto lo vamos a formalizar cerca del final del curso). Veamos un mini ejemplo de como utilizar esto calculando: $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)}$, impongamos que esa fracción es una suma y averigüemos como debe ser $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{A}{j} + \frac{B}{j+1} = \frac{A(j+1)+Bj}{j(j+1)} = \frac{Aj+A+Bj}{j(j+1)} = \frac{(A+B)j+A}{j(j+1)}$, imponiendo la igualdad en el numerador se llega a que $(A+B)j + A = 1$, y acá se usa lo explicado antes: igualamos todo lo con j con todo lo con j y todo el resto con todo el resto; pero no hay j a la derecha! si hay siempre hay un $0j$, así llegamos a que $A+B=0$ y $A=1$, por lo tanto $B=-1$. Así: $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{A}{j} + \frac{B}{j+1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Utilizando un razonamiento muy parecido al de antes calcule las siguientes sumatorias:

- i) $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k^2} \frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$
- ii) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$