MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: 4 de Mayo del 2018

Pauta auxiliar 7: Sumatorias

P1. Calcule: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[75]{k+2} - \sqrt[75]{k}$

R: Queremos utilizar una suma telescópica pero para ello tiene que haber dos términos consecutivos y no es el caso, acá están a distancia dos... Bueno agregamos lo que falta!

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sqrt[75]{k+2} - \sqrt[75]{k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt[75]{k+2} - \sqrt[75]{k+1} + \sqrt[75]{k+1} - \sqrt[75]{k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt[75]{k+2} - \sqrt[75]{k+1} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt[75]{k+1} - \sqrt[75]{k} \\
&= \sqrt[75]{n+2} - \sqrt[75]{1+1} + \sqrt[75]{n+1} - \sqrt[75]{1} = \sqrt[75]{n+2} + \sqrt[75]{n+1} - \sqrt[75]{2} - 1
\end{aligned}$$

P2. Definimos, para $n \geq 1, r \neq 1$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k$.

a) Demuestre, sin usar inducción, que $S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$.

R: Démosle para adelante

$$\begin{aligned}
r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} &= r(\sum_{k=1}^{n} kr^k - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} = r(\sum_{k=1}^{n-1} kr^k + nr^n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\
&= r(\sum_{k=1}^{n-1} kr^k) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} kr^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} kr^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kr^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)r^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)r^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kr^k = S_n
\end{aligned}$$

Donde el 5to igual se justifica pues el término 0 de esa suma vale 0, así que es lo mismo que esté a que no esté, y el penúltimo igual fue un cambio de indicies (si los límites suben, los de adentro bajan y viceversa).

b) Demuestre, sin usar inducción que $S_n = \dfrac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2}$.

R: De la parte anterior sabemos que

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \Leftrightarrow S_n(1-r) = -nr^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \Leftrightarrow S_n = \frac{-nr^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}}{1-r}$$

Veamos que el valor de la derecha es lo pedido

$$-nr^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}r^{k+1}=-nr^{n+1}+r\sum_{k=0}^{n-1}r^{k}=-nr^{n+1}+r\frac{1-r^{n}}{1-r}=\frac{-(1-r)nr^{n+1}+r-r^{n+1}}{1-r}$$
$$=\frac{-nr^{n+1}+nr^{n+2}+r-r^{n+1}}{1-r}=\frac{r-(n+1)r^{n+1}+nr^{n+2}}{1-r}$$
$$\therefore S_n=\frac{r-(n+1)r^{n+1}+nr^{n+2}}{(1-r)^2}$$

P3. El objetivo de esta pregunta es calcular la suma

$$\frac{1}{2}+(1+2)\frac{2}{3}+(1+2+3)\frac{3}{4}+(1+2+3+4)\frac{4}{5}+...+(1+2+3+...+n)\frac{n}{n+1}$$

Para ello se recomienda seguir los siguiente pasos:

I) Escriba en forma de sumatoria la suma $\frac{1}{2}c_1+\frac{2}{3}c_2+\frac{3}{4}c_3+...+\frac{n}{n+1}c_n$.
R: Es bastante claro el patrón, por lo que $\frac{1}{2}c_1+\frac{2}{3}c_2+\frac{3}{4}c_3+...+\frac{n}{n+1}c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}c_k$

II) Determine el valor de c_k para el problema en específico.
R: Veamos $C_1=1$, $C_2=1+2$, $C_3=1+2+3$,...,$C_k=1+2+3+...+k=\sum_{j=1}^{k}j=\frac{k(k+1)}{2}$, donde esto es por ser una suma conocida.

III) Calcule la sumatoria que le quedó.
R: Reemplazando lo obtenido en la parte anterior en la primera se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}c_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\sum_{j=1}^{k}j$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\frac{k(k+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Donde el último igual es por ser una suma conocida.

P4. En $\mathbb{R}^n$ se define la relación $(x_1,x_2,...,x_n)\ \mathcal{S}\ (y_1,y_2,...,y_n)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$.

a) Demuestre que $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia.

- Refleja: $(x_1,...,x_n)\mathcal{S}(x_1,...,x_n)$ pues $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i$.
- Simétrica: Suponemos que $(x_1,...,x_n)\mathcal{S}(y_1,...,y_n)$ es decir $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$, luego es claro que $\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}x_i$ y por lo tanto $(y_1,...,y_n)\mathcal{S}(x_1,...,x_n)$.
- Transitiva: Suponemos que $(x_1,...,x_n)\mathcal{S}(y_1,...,y_n)$ y $(y_1,...,y_n)\mathcal{S}(z_1,...,z_n)$ es decir $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$ y $\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}z_i$, luego directamente se tiene que $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}z_i$ y por lo tanto $(x_1,...,x_n)\mathcal{S}(z_1,...,z_n)$.

Como la relación es refleja, simétrica y transitiva, es de equivalencia.

b) Demuestre que $[(2,3,4,...,n+1)]_{\mathcal{S}} = \left\{(x_1,...,x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n(n+3)}{3}\right\}$

R: $[(2,3,4,...,n+1)]_{\mathcal{S}}$ es el conjunto de todos los elementos que se relaciona con $(2,3,4,...,n+1)$ para relacionarme con el debo sumar lo mismo que él, es decir debe ocurrir que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=2}^{n+1} i$, que es casi una suma conocida con el detalle de que parte de 2, arreglemos eso $\sum_{i=2}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n+1} i - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2+3n+2-2}{2} = \frac{n^2+3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$

c) Se define la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathcal{S} \\ x &\longmapsto f(x) = [(x,0,...,0)]_{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

¿Es biyectiva esta función?

R:Veamos primero que es sobreyectiva, sea $[y] \in \mathbb{R}^n/\mathcal{S}$, es decir y es de la forma $(y_1, y_2, ..., y_n)$ y su clase de equivalencia se caracteriza como todos los $x \in \mathbb{R}^n$ tales que su suma es la misma que la de y, un elemento simple que cumple eso es el vector que tiene en su primera coordenada el valor de la suma y el resto son puros ceros, dicho de otra forma: $[(y_1,...,y_n)] = [(\sum_{i=1}^{n} y_i, 0, 0, ..., 0)]$, pues sabemos que las clases de equivalencia son invariantes bajo representante. Luego se tendrá que tomando $x = \sum_{i=1}^{n} y_i$ se tiene que $f(x) = [y]$ y por lo tanto es sobreyectiva.

Además es inyectiva pues si tomo $x_1 \neq x_2$ se tendrá que $[(x_1,0,0,0,...,0)] \neq [(x_2,0,0,0,...,0)]$ ya que en la primera viven los elementos que suman x_1 y en la segunda los que suman x_2 y no puede pasar esas dos cosas al mismo tiempo. Como la función es inyectiva y sobreyectiva es biyectiva.

P5. Calcule

$$\sum_{k=0}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor (-1)^k$$

R: Notemos que tanto esa parte entera como el $(-1)^k$ se comporta distinto según si el k es par o impar, así resulta natural separar la suma en dos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor (-1)^k &= \sum_{k=0:\text{ k par}}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor (-1)^k + \sum_{k=0:\text{ k impar}}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor (-1)^k \\ &= \sum_{k=0:\text{ k par}}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor - \sum_{k=0:\text{ k impar}}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Notemos que en la segunda suma al tomar un k impar, así $k+1$ es par y luego al dividirlo en 2 da entero, por lo que la parte entera no hace nada. En cambio para k par, $\frac{k+1}{2} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$ y como k es par su mitad es entera, por lo que al sumarle 0.5 y calcular su parte entera vuelve a

lo mismo, así las sumas anteriores quedan

$$\sum_{k=0:\text{ k par}}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor - \sum_{k=0:\text{ k par}}^{2n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \sum_{k=0:\text{ k par}}^{2n} \frac{k}{2} - \sum_{k=0:\text{ k impar}}^{2n} \frac{k+1}{2}$$
$$= \sum_{k=0:\text{ k par}}^{2n} \frac{k}{2} - \sum_{k=0:\text{ k impar}}^{2n-1} \frac{k+1}{2}$$

Donde la última igualdad es pues estoy considerando solo los términos impares por lo que el $2n$ no se incluye. Finalmente si recordamos que todo par se escribe como $2j$ y todo impar $2j-1$ podemos hacer un cambio de variable y queda:

$$\sum_{k=0:\text{ k par}}^{2n} \frac{k}{2} - \sum_{k=0:\text{ k impar}}^{2n-1} \frac{k+1}{2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{2j}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{2j-1+1}{2} = \sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j = 0$$

Pues el primer término de la primera suma es 0.

P6. Sea E un conjunto no vacío y considere $K \in \mathcal{P}(E)$ fijo, con $K \neq \emptyset$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por

$$A\mathcal{R}_K B \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A.$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.
R:

- Refleja: $A\mathcal{R}_K A \Leftrightarrow A \cap K \subseteq A \Leftrightarrow V$.
- Transitiva: $A\mathcal{R}_K B \wedge B\mathcal{R}_K C \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A \wedge C \cap K \subseteq B \Rightarrow C \cap K \subseteq A$ veamos esto último, tomemos un x en $C \cap K$ por hipótesis, x está en B y como ya sabíamos que estaba en K tiene que estar en $B \cap K$ y por hipótesis está en A.

b) Proponga un conjunto $K \in \mathcal{P}(E)$ de modo que $\mathcal{R}_K$ sea una relación de orden. Justifique.
R: Ya sabemos que es refleja y transitiva, falta solo que sea antisimétrica para que sea de orden. Veamos que A cumple que si $A\mathcal{R}_K B \wedge B\mathcal{R}_K A \Rightarrow A = B$, después de un rato uno se da cuenta que tomando $K = E$ se concluye (claramente hay otros, por ejemplo $K = A \cup B$). En efecto: $A\mathcal{R}_E B \wedge B\mathcal{R}_E A \Leftrightarrow A \cap E \subseteq B \wedge B \cap E \subseteq A \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.