

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliar: Juan Pedro Ross

Fecha: 4 de Mayo del 2018



Auxiliar 7: Sumatorias

Resumen:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}.$$

$$\text{Suma telescópica: } \sum_{k=p}^q a_k - a_{k-1} = a_q + a_{p-1}.$$

$$\text{Suma Aritmética: Sea } a_{n+1} = a_n + d \text{ y } a_0 \text{ fijo}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k = a_0(n+1) + d \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Suma geométrica: } \sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \text{ si } r \neq 1.$$

P1. Calcule: $\sum_{i=1}^n \sqrt[75]{k+2} - \sqrt[75]{k}$

P2. Definimos, para $n \geq 1, r \neq 1$ $S_n = \sum_{k=1}^n k r^k$.

a) Demuestre, sin usar inducción, que $S_n = r(S_n - n r^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$.

b) Demuestre, sin usar inducción que $S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + n r^{n+2}}{(1-r)^2}$.

P3. El objetivo de esta pregunta es calcular la suma

$$\frac{1}{2} + (1+2)\frac{2}{3} + (1+2+3)\frac{3}{4} + (1+2+3+4)\frac{4}{5} + \dots + (1+2+3+\dots+n)\frac{n}{n+1}$$

Para ello se recomienda seguir los siguiente pasos:

- i) Escriba en forma de sumatoria la suma $\frac{1}{2}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{3}{4}c_3 + \dots + \frac{n}{n+1}c_n$.
- ii) Determine el valor de c_k para el problema en específico.
- iii) Calcule la sumatoria que le quedó.

P4. En $\mathbb{R}^n$ se define la relación $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mathcal{S} (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$.

a) Demuestre que $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia.

b) Demuestre que $[(2, 3, 4, \dots, n+1)]_{\mathcal{S}} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n(n+3)}{3} \right\}$

c) Se define la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n / \mathcal{S}$$

$$x \longmapsto f(x) = [(x, 0, \dots, 0)]_{\mathcal{S}}$$

¿Es biyectiva esta función?

P5. Demuestre que si A, B, C son conjuntos finitos entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$