MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: Viernes 27 de Abril.

Auxiliar 6: Relaciones

Resumen: Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces

- $\mathcal{R}$ es **refleja** ssi $(\forall x \in A)\ x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **simétrica** ssi $(\forall x, y \in A)\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **antisimétrica** ssi $(\forall x, y \in A)\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathcal{R}$ es **transitiva** ssi $(\forall x, y, z \in A)\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- $\mathcal{R}$ es relación de **orden** ssi es refleja, antisimétrica y transitiva.
- $\mathcal{R}$ es relación de **equivalencia** ssi es refleja, simétrica y transitiva.
- Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden, diremos que es un **orden total** si para cada $x, y \in A$ $(x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$. De lo contrario, se dirá que es un **orden parcial**.
- Si $\mathcal{R}$ es de equivalencia y $x \in A$ $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$ es la **clase de equivalencia** de x asociada a $\mathcal{R}$.
- $A/\mathcal{R}$ es el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ y se le llama **conjunto cuociente**.

P1. Sea U universo, en $\mathcal{P}(U)$ definimos la relación $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists h : A \to B$ biyectiva. Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, luego asuma que U tiene n elementos y calcule el conjunto cociente.

R:

- Refleja: Se cumple pues $Id_A : A \to A$ es biyectiva.
- Simétrica: Si asumimos que $A\mathcal{R}B$, entonces existe una función biyectiva $f : A \to B$, luego $f^{-1} : B \to A$ es biyectiva, es decir $B\mathcal{R}A$.
- Transitiva: Si asumimos que $A\mathcal{R}B$ y $B\mathcal{R}C$, entonces existen dos funciones biyectivas $f : A \to B$, $g : B \to C$, luego $g \circ f : A \to C$ es biyectiva por ser composición de biyectivas, y por lo tanto $A\mathcal{R}C$.

Como la relación es refleja, simétrica y transitiva, es de equivalencia. Para analizar el conjunto cociente hay que pensar que implica que haya una biyección entre dos conjuntos, pensémoslo si $A = \{x_0\}$ y $A\mathcal{R}B$ entonces B tiene que necesariamente ser de la forma $\{y_0\}$ pues si llegase a tener más elementos no hay como armar una función sobreyectiva que parta en A (y por lo tanto no hay como armar una función biyectiva). Si $A = \{x_0, x_1\}$ y $A\mathcal{R}B$, B debe tener dos elementos, pues si llegase a tener 1 no hay como armar una función inyectiva, y si tuviese más de 2 no hay como armar una sobreyectiva. Así generalizando el argumento si $A = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ y $A\mathcal{R}B$ necesariamente $B = \{y_0, ..., y_k\}$. Notemos que todos estos casos son disjuntos y moviendo el k hasta n cubro todos los casos así $U/\mathcal{R} = \{\{[x_0\}], [\{x_0, x_1\}], ..., [\{x_1, x_1, ..., x_n\}]\}$

P2. Sea U conjunto universo y $f : U \to U$ una función, definimos en $\mathcal{P}(U)$ la relación $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow f(A) = f(B)$ demuestre que la relación es de equivalencia pero no necesariamente de orden. ¿qué hipótesis puede agregar para que sí sea de orden?.
R:

- Refleja: $A\mathcal{R}A$, pues $f(A) = f(A)$.
- Simétrica: si asumimos que $A\mathcal{R}B$ entonces $f(A) = f(B)$, que claramente implica que $f(B) = f(A)$, es decir $B\mathcal{R}A$.
- Transitiva: si asumimos que $A\mathcal{R}B$ y $B\mathcal{R}C$, se tiene que $f(A) = f(B)$ y $f(B) = f(C)$, lo que implica que $f(A) = f(C)$, es decir $A\mathcal{R}C$.

Luego como la función es refleja, simétrica y transitiva es de equivalencia. Sin embargo no es de orden pues no se cumple la antisimetría, ya que si $f(A) = f(B)$ y $f(B) = f(A)$, no tienen porqué ser A y B iguales, piensen en la función constante, claramente cumple que para cualquier A y B sus imágenes son las mismas, y el "culpable" de que pase eso es que la función está mandando puntos distintos a las mismas imágenes, es decir se arregla con que la función sea inyectiva. En efecto asumamos que f es inyectiva y que $f(A) = f(B)$; demostremos que A=B, queremos ver una igualdad de conjuntos, tomamos un $x \in A$, luego $f(x) \in f(A) = f(B)$, es decir $f(x) \in f(B)$, es decir $f(x)$ tiene al menos una pre-imágen en B, pero por hipótesis, solo hay una atrás y es x, es decir $x \in B$ y por lo tanto $A \subseteq B$. La otra inclusión es análoga, con esto concluimos que si f es inyectiva, entonce $\mathcal{R}$ es anti-simétrica, y como ya sabíamos que era refleja y transitiva, es de orden.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \circ f = 2x + 5$ Demuestre que f es biyectiva.
R: Es conocido que $g(x) = 2x + 5$ es una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, luego como tengo una composición biyectiva concluimos que la primera es inyectiva y la segunda sobreyectiva, pero son la misma, asi que f es biyectiva.

P4. Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A \text{ funciones } \}$ y $\mathcal{F}' = \{f : B \to B \text{ funciones } \}$ y $\varphi : B \to A$ una función biyectiva. Demuestre que la siguiente función es biyectiva y calcule su inversa.

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}' \\ f &\longmapsto \psi(f) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \end{aligned}$$

R: OJO! NO ESTAMOS DICIENDO QUE LA COMPOSICIÓN DE ESAS FUNCIONES ES BIYECTIVA, ES QUE LA FUNCIÓN QUE TOMA UN f y ENTREGA $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ES BIYECTIVA.
Dicho eso, como me piden demostrar que es biyectiva y calcular su inversa recordemos que hay un teorema que dice si se cumplen dos de las siguientes cosas: 1) ψ es biyectiva, 2) hay una función g tal que $g \circ \psi = Id$, 3) hay una función g tal que $\psi \circ g = Id$; entonces ψ es biyectiva y más aún $\psi^{-1} = g$. Intentemos ver que se cumple 2 y 3, para ello debemos generar un postulante a inversa, y para ello, tal como en el colegio, lo que uno hace es despejar "x", que en este caso sería f, como sabemos que φ es una función biyectiva, existe la inversa y

podemos componer con ella:

$$h = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \ / \varphi \circ$$
$$\Rightarrow \varphi \circ h = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = Id \circ f \circ \varphi = f \circ \varphi \ \ / \circ \varphi^{-1}$$
$$\Rightarrow \varphi \circ h \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = f \circ Id = f$$

Luego postulamos como inversa a

$$\begin{aligned} g : \mathcal{F}' &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f &\longmapsto g(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

Luego $(\psi \circ g)(f) = \psi(g(f)) = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \varphi = f$ y $(g \circ \psi)(f) = g(\psi(f)) = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \varphi = f$.

Concluimos que ψ es biyectiva y que $\psi^{-1} = g$.

P5. Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U tales que $A \cap B = \phi$. Sea $f : U \to U$ una función.

(i) Probar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$.
R: Supongamos que no es vacío, sea $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$ lo que es una contradicción.

(ii) Probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \cap f(B) = \phi$.
R: Supongamos que no, sea $y \in f(A) \cap f(B)$, luego y tiene al menos una pre-imagen en A y otra en B, pero la función es inyectiva por lo que solo puede tener un elemento atras, es decir $f^{-1}(y) = \overline{x}$ con $\overline{x} \in A \wedge \overline{x} \in B$, lo que es una contradicción.

(iii) Probar que si f es sobreyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$.
R: Sabemos que $f(A) \cup f(A^c) \subseteq U$, veamos que también se cumple la otra inclusión. Sea $y \in U$, como la función es sobreyectiva, debe tener una pre-imagen x tq $f(x) = y$, luego $x \in A \vee x \in A^c$ pues no hay otra posibilidad, si $x \in A \Rightarrow y = f(x) \in f(A)$ y sino $y = f(x) \in f(A^c)$, es decir $y \in f(A) \vee f(A^c) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(A^c)$. Lo que concluye que $U = f(A) \cup f(A^c)$.

P6. Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función que satisface la condición siguiente:

$$\exists n \in N \setminus \{0\} \text{ tal que } f^{(n)} = id_A.$$

Se define en A la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k \in 1, 2, ..., n \text{ tal que } f^{(k)}(x) = y.$$

a) Demuestre que R es relación de equivalencia.
R:

- Refleja: $x \mathcal{R} x$ pues por hipótesis $f^n(x) = x$.

- Simétrica: Supongamos que $x\mathcal{R}y$ es decir existe un $k \in \{1, ..., n\} : f^k(x) = y$, luego $f^{n-k}(y) = f^{n-k}(f^k(x)) = f^n(x) = x$, es decir $y\mathcal{R}x$.
- Transitiva: Supongamos que $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$, es decir hay un k_1, k_2 tal que $f^{k_1}(x) = y \wedge f^{k_2}(y) = z$, luego se tiene que $f^{k_1+k_2}(x) = z$, luego si $k_1 + k_2 \leq n$, estamos listos, el único detalle es que puede ocurrir que $n < k_1 + k_2$, pero notemos que $f^{n+h}(x) = f^h(x)$, asi que si se pasa entonces $f^{k_1+k_2-n}(x) = z$, y ahora si $k_1 + k_2 - n < n$, pues la suma de dos números menores que n no pueden ser más grandes que $2n$. Luego se concluye que $x\mathcal{R}z$.

Como la relación es refleja, simétrica y transitiva es de equivalencia.

b) Considere $A = \{0, 1\}^3$ y $f : A \to A$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$. Pruebe que f satisface la propiedad enunciada, y determine y escriba todas las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ en A.
R: Lo que hace la función es girar las coordenadas, luego si se hace tres veces esto se vuelve donde se partió, es decir $f^3((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3)$.
Como lo que hace la función es girar las coordenadas, no me inmporta donde esté cada número, sino cuantas veces aparezca cada número, es decir el conjunto cociente será: $\{[(1, 1, 1)], [(1, 1, 0)], [(1, 0, 0)], [(0, 0, 0)]\}$ pues cualquier otro elemento que se tome, va a ser una permutación de alguno de los anteriores, pues no puede tener una cantidad de 1's que no sea alguna de las anteriores.