

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell.

Auxiliar: Juan Pedro Ross.

Fecha: Domingo 23 de Abril.



Guía Control 3: Funciones

P1. Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow A$. Además se tiene que:

- $h \circ g \circ f$ es inyectiva
- $f \circ h \circ g$ es inyectiva
- $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva

Demuestre que f, g, h son biyectivas.

P2. Sean A, B conjuntos no vacíos. Se define $\phi : A \times B \rightarrow A$, $\phi(x, y) = x$.

- (a) Demuestre que ϕ es sobreyectiva.
- (b) Demuestre que ϕ es biyectiva si y solo si B tiene exactamente un elemento.
- (c) Para las condiciones anteriores, encuentre la inversa de ϕ .

P3. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

- (a) Justifique por qué $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.
- (b) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero **no** inyectiva.
- (c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

- (d) Sean $f, g \in \mathcal{F}$ definidas por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \frac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{f, g\}$. Encuentre explícitamente $\Psi(A \times A)$.

P4. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$ y sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \rightarrow B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

- (a) Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h también lo es.
- (b) Demuestre que si f, g son sobreyectivas, entonces h también lo es.

(c) Demuestre que si f, g son biyectivas, entonces h también lo es y encuentre su inversa.

P5. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, demuestre que:

- (i) $C \subseteq f^{-1}(f(C))$. De un ejemplo en el que no se cumpla la otra inclusión y demuestre que si f es inyectiva entonces se cumple la igualdad.
- (ii) $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$.

P6. Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U tales que $A \cap B = \phi$. Sea $f : U \rightarrow U$ una función.

- (i) Probar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$.
- (ii) Probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \cap f(B) = \phi$.
- (iii) Probar que si f es sobreyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$.

P7. Una función se dice estrictamente creciente si y sólo si

$$(\forall x, y \in \text{Dom}(f)), x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

- (a) Pruebe que toda función estrictamente creciente es inyectiva
- (b) Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, ¿es sobreyectiva?
- (c) Pruebe que si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente es sobreyectiva, entonces $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$