MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: Viernes 27 de Abril.

Auxiliar 6: Relaciones

Resumen: Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces

- $\mathcal{R}$ es **refleja** ssi $(\forall x \in A)\ x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **simétrica** ssi $(\forall x, y \in A)\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **antisimétrica** ssi $(\forall x, y \in A)\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathcal{R}$ es **transitiva** ssi $(\forall x, y, z \in A)\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- $\mathcal{R}$ es relación de **orden** ssi es refleja, antisimétrica y transitiva.
- $\mathcal{R}$ es relación de **equivalencia** ssi es refleja, simétrica y transitiva.
- Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden, diremos que es un **orden total** si para cada $x, y \in A$ $(x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$. De lo contrario, se dirá que es un **orden parcial**.
- Si $\mathcal{R}$ es de equivalencia y $x \in A$ $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$ es la **clase de equivalencia** de x asociada a $\mathcal{R}$.
- $A/\mathcal{R}$ es el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ y se le llama **conjunto cuociente**.

P1. Sea U universo, en $\mathcal{P}(U)$ definimos la relación $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists h : A \to B$ biyectiva. Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, luego asuma que U tiene n elementos y calcule el conjunto cociente.

P2. Sea U conjunto universo y $f : U \to U$ una función, definimos en $\mathcal{P}(U)$ la relación $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow f(A) = f(B)$ demuestre que la relación es de equivalencia pero no necesariamente de orden. ¿qué hipótesis puede agregar para que sí sea de orden?.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \circ f = 2x + 5$ Demuestre que f es biyectiva.

P4. Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A \text{ funciones }\}$ y $\mathcal{F}' = \{f : B \to B \text{ funciones }\}$ y $\varphi : B \to A$ una función biyectiva. Demuestre que la siguiente función es biyectiva y calcule su inversa.

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}' \\ f &\longmapsto \psi(f) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \end{aligned}$$

P5. Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U tales que $A \cap B = \phi$. Sea $f : U \to U$ una función.

(i) Probar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$.
(ii) Probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \cap f(B) = \phi$.
(iii) Probar que si f es sobreyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$.

P6. Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función que satisface la condición siguiente:

$$\exists n \in N \setminus \{0\} \text{ tal que } f^{(n)} = id_A.$$

Se define en A la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in 1, 2, ..., n \text{ tal que } f^{(k)}(x) = y.$$

a) Demuestre que R es relación de equivalencia.

b) Considere $A = \{0, 1\}^3$ y $f : A \to A$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$. Pruebe que f satisface la propiedad enunciada, y determine y escriba todas las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ en A.