P4) Recordemos que $\forall f, g$ funciones

$f \circ g$ inyectiva $\Rightarrow$ g inyectiva

$f \circ g$ sobreyectiva $\Rightarrow$ f sobreyectiva.

i) Si h es biyectiva y $f \circ g = h$, entonces

$f \circ g$ es biyectiva

$\Leftrightarrow$ $f \circ g$ es inyectiva $\wedge$ $f \circ g$ es sobreyectiva

$\Rightarrow$ g es inyectiva $\wedge$ f es sobreyectiva.

También sabemos que $g \circ f = Id_A$. La identidad siempre es biyectiva y por lo tanto, $g \circ f$ es biyectiva.

$\Leftrightarrow g \circ f$ es inyectiva $\wedge$ $g \circ f$ es sobreyectiva.

$\Rightarrow f$ inyectiva $\wedge$ g sobreyectiva.

ya que f y g son inyectivas y sobreyectivas,

f y g son biyectivas.

ii) Tenemos que $f \circ g = h \quad / g \circ$

$$g \circ f \circ g = g \circ h$$

$\Leftrightarrow \quad Id_A \circ g = g \circ h$

$\Leftrightarrow \quad g = g \circ h \quad / g^{-1} \circ$ (Que existe porque g es biyectiva)

$$g^{-1} \circ g = g^{-1} \circ g \circ h$$

$\Leftrightarrow id_B = id_B \circ h$

$\Leftrightarrow \boxed{id_B = h}$

PAUTA AUXILIAR 4

P1 a) P.D.Q $(\forall A,B \subseteq E)\ f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B)$

Sea $y \in f(A)\setminus f(B)$ con $A,B \subseteq E$ arbitrarios

$\iff y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$

$\iff \exists x_0 \in A\ ;\ f(x_0)=y \wedge \nexists x_1 \in\ ;\ f(x_1)=y$

$\iff \exists x_0 \in A : f(x_0)=y \wedge \forall x_1 \in B : f(x_1) \neq y$

$\Rightarrow x_0 \in A \wedge x_0 \notin B$ (porque si $x_0 \in B$ entonces $f(x_0) \neq y$)

$\iff x_0 \in A\setminus B$

$\Rightarrow \exists x_0 \in A\setminus B : f(x_0)=y$

$\iff y \in f(A\setminus B)$

b) como ya demostramos que $(\forall A,B \subseteq E)\ f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B)$, solo tenemos que demostrar que

$[(\forall A,B \subseteq E)\ f(A\setminus B) \subseteq f(A)\setminus f(B)] \iff f$ es inyectiva

$\Leftarrow$ Hipótesis: f inyectiva. P.D.Q $(\forall A,B \subseteq E)\ f(A\setminus B) \subseteq f(A)\setminus f(B)$.

Sea $y \in f(A\setminus B)$.

$\iff \exists x_0 \in A\setminus B : f(x_0)=y$

$\Rightarrow \exists x_0 \in A\ f(x_0)=y$ $(A\setminus B \subseteq A)$

$\iff y \in f(A)$ ★

Ahora solo falta ver que $y \notin f(B)$.

Por contradicción, digamos que $y \in f(B)$

$\iff \exists x_1 \in B : f(x_1) = y$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0) = y$

$\Rightarrow x_1 = x_0$ (porque f es inyectiva)

$\rightarrow|\leftarrow$

porque $x_1 \in B$ y $\underbrace{x_0 \in A \setminus B}_{\Rightarrow x_0 \notin B}$!

$\therefore y \notin f(B)$

Ahora, si volvemos atrás, por ★ teníamos que $y \in f(A)$

Entonces $y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$

$\iff y \in f(A) \setminus f(B)$

$\therefore f$ inyectiva $\Rightarrow (\forall A, B \subseteq E)\ f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.

$\Rightarrow$| Hipótesis: $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \quad \forall A, B \subseteq E$.

P.D.Q: f es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sea $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$ $\quad x_1 \neq x_2$.

En efecto: $f(A) \setminus f(B) = f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) \overset{\text{por Hipótesis}}{=} f(\{x_1\} \setminus \{x_2\})$

Pero como $x_2 \neq x_1$, $\{x_1\} \setminus \{x_2\} = \{x_1\}$

$\Rightarrow f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) = f(\{x_1\})$

$\Rightarrow f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \emptyset$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\therefore f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \quad \forall A, B \subseteq E \Rightarrow f$ es inyectiva

ya que demostramos la parte (a) y ambas implicaneias, podemos concluir que

$(\forall A, B \subseteq E)$

$f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B) \Leftrightarrow f$ es inyectiva

c) P.D.Q $(\forall Y \subseteq F)\ f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Sea $y \in f(f^{-1}(Y))$

$\iff \exists x_0 \in f^{-1}(Y) : f(x_0) = y$

$\iff \exists w \in Y : f(x_0) = w \ : \ f(x_0) = y$

$\Rightarrow w = y$

$\Rightarrow y \in Y$

d) como ya demostramos que $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y \quad \forall Y \subseteq F$,
solo tenemos que demostrar que:

$[(\forall Y \subseteq F)\ Y \subseteq f(f^{-1}(Y))] \iff f$ es sobreyectiva

$\Leftarrow$ P.D.Q $(\forall Y \subseteq F)\ Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$

Sea $y \in Y$, ya que f es sobreyectiva, $(\forall y \in F)(\exists x \in E)\ f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y)$ tal que $f(x_0) = y$

$\Rightarrow f(x_0) \in f(f^{-1}(Y))$

$\iff y \in f(f^{-1}(Y))$

$\therefore$ f sobreyectiva $\Rightarrow [(\forall Y \subseteq F)\ Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$

$\Rightarrow$| P.D.Q f es sobreyectiva

$\Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists x \in E)$ tal que $f(x) = y$

$\Leftrightarrow f(E) = F$

ya que $(\forall Y \subseteq F)\ f(f^{-1}(Y)) = Y$, en particular

$$f(f^{-1}(F)) = F$$

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(f^{-1}(F)))}_{f^{-1}(F)} = \underbrace{f^{-1}(F)}_{=E} \quad \text{porque } F \text{ es función}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(F) = E$$

$\Leftrightarrow$ f es sobreyectiva

$\therefore [(\forall Y \subseteq F)\ \ Y]$

ya que demostramos (c) y ambas implicancias, podemos concluir que

$[(\forall Y \subseteq F)\ Y = f(f^{-1}(Y)) \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva

e) P.D.Q $(\forall Y \subseteq F)\ f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

Sea $x_0 \in (f^{-1}(Y))^c$

$\iff x_0 \in \{x \in E : f(x) \in Y\}^c$

$\iff x_0 \in \{x \in E : f(x) \notin Y\}$

$\iff x_0 \in \{x \in E : f(x) \in Y^c\}$

$\iff x_0 \in f^{-1}(Y^c)$

$\therefore (\forall Y \subseteq F)\ f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

P4 a) $f(0+0) = f(0) + f(0) = f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0$ //

b) $0 = f(0) = f(m + (-m)) = f(m) + f(-m)$

$\Rightarrow f(-m) = -f(m)$ //

c) $\Rightarrow$] ya sabemos que $f(0) = 0$

y si f es inyectiva es directo que $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$\Leftarrow$] $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0$

$\Rightarrow f(x) + f(-y) = 0$ (por b))

$\Rightarrow f(x-y) = 0$ (por hip)

$\Rightarrow x - y = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = y}$ $\therefore f$ iny. //

$\therefore f$ iny $\iff f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ //

- Sea $f : A \to B$ una función, con A y B no vacíos. Además considere C un conjunto con al menos dos elementos, pruebe que:
  $[\forall g, h : B \to C$ se cumple que $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h] \Leftrightarrow f$ es sobreyeciva.

  R: Como en toda equivalencia hay que hacer dos implicancias, primero asumamos que $[\forall g, h : B \to C$ se cumple que $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h]$, y demostremos que f es sobreyectiva. Supongamos que no, esto significa que existen elementos en $B \setminus f(A)$, y tomemos cualquier función $g : B \to C$, como esta es función tiene que existir $g(\overline{x}) = y_1$, con $\overline{x} \in B \setminus f(A)$, consideremos ahora $h : B \to C$, que va a hacer exactamente lo mismo que g, con el único detalle de que $h(\overline{x}) = y_2 \neq y_1$ (que existe que pues C tiene al menos dos elementos). Notemos que se cumple que $g \circ f = h \circ f$, pues el único elemento que cambió no pertenece a la imagen de f, por hipótesis debe ocurrir que $g = h$, pero eso implicaría que $g(\overline{x}) = h(\overline{x})$ y eso es una contradicción.

  Para la otra implicancia, asumamos que f es sobreyectiva, y veamos que $\forall g, h : B \to C$ se cumple que $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$. Entonces tomemos dos funciones cualesquiera $g, h : B \to C$ ya sabemos que tienen el mismo conjunto de partida y de llegada, solo falta ver que $g(z) = h(z) \forall z \in B$. Notemos que f es sobreyectiva, es decir $B = f(A)$, o dicho de otra forma $\forall z \in B \ \exists x \in A$ tal que $f(x) = z$, luego $g(z) = h(z) \forall z \in B \Leftrightarrow g(f(x)) = h(f(x)) \forall x \in A \Leftrightarrow g \circ f(x) = h \circ f(x) \forall x \in A$ y precisamente esto es lo que nos dice la hipótesis, por lo tanto podemos concluir que $h = g$.

- Sean A,B dos conjuntos no vacíos, considere la función:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) &\longrightarrow \mathcal{P}(A \cup P) \\ (X, Y) &\longmapsto f((X, Y)) = X \cup Y \end{aligned}$$

  I) Demuestre que F es sobreyectiva.
  R: Sea $Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$, queremos dos elementos que unidos formen Z, pero Z es subconjunto de $A \cup B$, es decir $Z = Z \cap (A \cup B) = (Z \cap A) \cup (Z \cap B)$, el primer conjunto está contenido en A y el segundo en B. Luego se cumple que $f((Z \cap A, Z \cap B)) = Z$, es decir es sobreyectiva.

  II) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow F$ es biyectiva y calcule su inversa.
  Como sabemos que es sobreyectiva falta solo ver la inyectividad, uno podría demostrar eso y después calcular la inversa. Pero hay un teorema que dice que si uno encuentra una función g que al componer f por la derecha y la izquierda es la identidad, entonces necesariamente f es biyectiva y g es su inversa, y como nos piden calcular la inversa no tiene sentido que demostremos la inyectividad aparte. De la parte anterior ya le conocemos una pre-imagen a todo $Z \subseteq A \cup B$, si fuese biyectiva la pre-imagen es única así que el candidato a inversa tiene que ser ese

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}(A \cup B) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ Z &\longmapsto g(Z) = ((Z \cap A, Z \cap B)) \end{aligned}$$

  Ya sabemos que $f \circ g(Z) = Z$ por lo tanto $f \circ g = Id_{\mathcal{P}(A \cup B)}$, veamos que también se cumple para $g \circ f$. En efecto,

$$\begin{aligned} g \circ f(X, Y) &= g(X \cup Y) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B) \\ &= ([(X \cap A) \cup (Y \cap A)], [(X \cap B) \cup (Y \cap B)]) \end{aligned}$$

  Pero recordemos que $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, y que $A \cap B = \emptyset$, por lo tanto

$$\begin{aligned} &([(X \cap A) \cup (Y \cap A)], [(X \cap B) \cup (Y \cap B)]) = \\ &([(X \cap A) \cup \emptyset], [\emptyset \cup (Y \cap B)]) = (X \cap A, Y \cap B) = (X, Y) \end{aligned}$$

  Donde la última igualdad se tiene por ser subconjuntos, así concluimos que $g \circ f = Id_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$ y que por lo tanto f es biyectiva y $f^{-1} = g$.

III) Ahora considere que $A \cap B \neq \emptyset$ y calcule

- $F^{-1}(A)$.
  R: Son todos los elementos (X,Y) tales que $X \cup Y = A$, como Y es subconjunto de B, en un principio no tiene por que tener elementos en común con A, pero $Y \subseteq X \cup Y = A$, así que necesariamente $Y \subseteq A$, así $F^{-1}(A) = \{(X, Y) : X \subseteq A \wedge Y \subseteq A \wedge X \cup Y = A\}$.
- $F^{-1}(\emptyset)$
  R: la única posibilidad de que la unión de dos cosas de vacío es que ambas sean vacías, asi que $F^{-1}(\emptyset) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$
- $F^{-1}(A \cap B)$
  R: Como $X \subseteq X \cup Y = A \cap B \subseteq B$ e $Y \subseteq X \cup Y = A \cap B \subseteq A$, necesariamente debe ocurrir que $A, B \subseteq A \cap B$, por lo tanto $F^{-1}(A \cap B) = \{(X, Y) : X, Y \subseteq A \cap B \wedge X \cup Y = B\}$