**MA1101-5** Introducción al Álgebra
**Profesor:** Pablo Dartnell
**Auxiliar:** Juan Pedro Ross
**Fecha:** 20 de Abril del 2018

# Auxiliar 5: Funciones

**Resumen:**

Sea $f : A \to B$, $g : C \to D$

- $g \circ f$ SOLO TIENE SENTIDO CUANDO $B = C$.
- $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.
- $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ inyectivas $\Rightarrow f \circ g$ inyectiva.
- $g \wedge f$ sobreyectivas $\Rightarrow f \circ g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ biyectivas $\Rightarrow f \circ g$ biyectiva con $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- Dado $A' \subseteq A$, de define el conjunto **imagen de** $A'$ como
$$f(A') = \{y \in B \mid (\exists x \in A')f(x) = y\}.$$
- Dado $B' \subseteq B$, de define el conjunto **preimagen de** $B'$ como
$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

**P1.** Sean $A, B$ conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow B$ funciones tales que:

- $h$ es biyectiva
- $f \circ g = h$
- $g \circ f = Id_A$

(a) Muestre que $f$ y $g$ son biyectivas.
(b) Muestre que $h = Id_B$.

**P2.** Sea $f : E \to F$ una función. Demuestre que:

*a*) $(\forall A, B \subseteq E)\ f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
*b*) $[(\forall A, B \subseteq E)\ f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)] \Leftrightarrow f$ es inyectiva.
*c*) $(\forall Y \subseteq F)\ f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.
*d*) $[(\forall Y \subseteq F)\ Y = f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva.
*e*) $(\forall Y \subseteq F)\ f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$.

**P3.** Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función con la siguiente propiedad $f(m + n) = f(m) + f(n)$ para cada par $m, n \in \mathbb{Z}$

*a*) Probar que $f(0) = 0$.
*b*) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.
*c*) Probar que $f$ es inyectiva si y solo si $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

**P4.** Sea $f : A \to B$ una función, con $A$ y $B$ no vacíos. Además considere C un conjunto con al menos dos elementos, pruebe que:
$[\forall g, h : B \to C$ se cumple que $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h] \Leftrightarrow f$ es sobreyeciva.

**P5.** Sean A,B dos conjuntos no vacíos, considere la función:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) &\longrightarrow \mathcal{P}(A \cup P) \\ (X, Y) &\longmapsto f\left((X, Y)\right) = X \cup Y \end{aligned}$$

i) Demuestre que F es sobreyectiva.

ii) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow F$ es biyectiva y calcule su inversa.

iii) Ahora considere que $A \cap B \neq \emptyset$ y calcule

- $F^{-1}(A)$
- $F^{-1}(\emptyset)$
- $F^{-1}(A \cap B)$