P1. Sea U conjunto universo y $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(U)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es cerrado para la resta si

$$\forall X, Y \in \mathcal{F} \text{ se cumple que } X \setminus Y \in \mathcal{F}.$$

R: Antes de empezar a pensar en responder la pregunta hay que intentar entender que está enunciado acá, esto dice que F es un conjunto que contiene conjuntos. Pero más aún, cada vez que hay dos conjuntos adentro necesariamente tiene que estar su resta. Por ejemplo si yo se que en $\mathcal{F}$ viven el $\{a, b\}$ y el $\{b\}$ necesariamente tiene que estar $\{a\}$.

I) Demuestre que los siguientes conjuntos son cerrados para la resta.

a) $\mathcal{P}(\{1, 2\})$
R: La forma más simple de verlo es calculando explícitamente las partes $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ y veamos que se cumple lo pedido, tomemos dos cualesquiera y su resta debe quedarse adentro.

- $\emptyset \setminus \{1\} = \emptyset$
- $\emptyset \setminus \{2\} = \emptyset$
- $\emptyset \setminus \{1, 2\} = \emptyset$
- $\emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$
- $\{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$
- $\{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$
- $\{1\} \setminus \{2\} = \{1\}$
- $\{1\} \setminus \{1, 2\} = \emptyset$
- $\{2\} \setminus \emptyset = \{2\}$
- $\{2\} \setminus \{1\} = \{2\}$
- $\{2\} \setminus \{2\} = \emptyset$
- $\{2\} \setminus \{1, 2\} = \emptyset$
- $\{1, 2\} \setminus \emptyset = \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{2\} = \{1\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{1, 2\} = \emptyset$

Es decir todas las restas se quedan dentro del conjunto. ¿Era necesario hacer toda esa lista? No, otro argumento posible es decir que en la partes de un conjunto U viven todos los subconjuntos, sin excepción. Y si tomo dos conjuntos A, B adentro y los resto entonces $A \setminus B \subseteq A \subseteq U$, es decir sigue siendo subconjunto de U, y por lo tanto me quedo en $\mathcal{P}(\mathcal{U})$

b) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \text{ solo contiene números pares } \} \cup \{\emptyset\}$
R: Acá no podemos hacer la lista entera, nunca terminaríamos pues $\mathcal{P}(\mathbb{N}\}$, es infinito!, asique tenemos que buscar otra estrategia. Veamos la definición de ser cerrados para la resta, tomemos dos conjuntos A, B en $\mathcal{F}$. Como esos conjuntos están ahí, cumplen la definición del conjunto, es decir todos los elementos hay dos posibilidades, o todos los elementos de A son pares, o A es vacío (lo mismo para B). Notemos que si es vacío, entonces $A \setminus B = \emptyset \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = B \setminus \emptyset = B$, en cualquiera de los dos casos cumple que se queda dentro del conjunto (el caso en que B es vacío es análogo). Así que solo resta ver que ocurre cuando ninguno de los dos son vacíos; Sabemos que $A \setminus B \subseteq A$, independiente de si hay elementos en común, dicho de otra forma $A \setminus B$ son todos los números en A que no están en B, como están en A son todos pares, es decir $A \setminus B$ solo tiene pares y eso es todo lo que me importaba para estar en $\mathcal{F}$. Concluimos que el conjunto es cerrado para la resta.

II) Demuestre que si $U \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es cerrado para la resta, entonces $\mathcal{F}$ es cerrado para el complemento, es decir $X \in \mathcal{F} \Rightarrow X^c \in \mathcal{F}$
R: Sabemos que el conjunto es cerrado para la resta, es decir si tomo dos conjuntos cualesquiera sean y los resto me quedo adentro. Por definición $X^c = U \setminus X$, y como U está en el conjunto no hay nada que demostrar.

P2. Sea E conjunto universo, y A, B contenidos en E fijos.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto f(X) = (X \cap A) \cup B \end{aligned}$$

Demuestre que la función es biyectiva si y solo si $A = E$, y $B = \emptyset$

R: La implicancia hacia la izquierda, como $A = E$, y $B = \emptyset$, reemplazamos y la función se convierte en

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto f(X) = X \end{aligned}$$

es decir la función identidad que sabemos es biyectiva. Para la otra implicancia, notemos que como la función es biyectiva en particular es sobreyectiva, es decir para todo elemento Y en $\mathcal{P}(E)$, debe haber alguien X atrás tal que $f(X) = Y$, en particular si tomamos el $Y = \emptyset$ tenemos que la única forma de que $(X \cap A) \cup B = \emptyset$ es que $X \cap A = \emptyset$ y $B = \emptyset$, que es lo que me importaba. Además la función es inyectiva y notemos que $f(A) = f(E)$, pues $A \cap E = A = A \cap A$, es decir tiene que necesariamente ocurrir que $A = E$.

P3. Discuta si son verdaderas las siguientes afirmaciones, en caso de serlo demuéstrelas, sino de un contraejemplo.

a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$
R: Es verdadero, en efecto sea

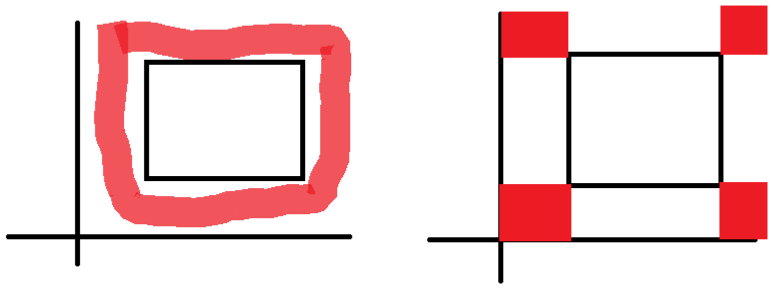
$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D) &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \cup D \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in C \vee y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \vee (x \in A \wedge y \in D) \vee (x \in B \wedge y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C \vee (x, y) \in A \times D \vee (x, y) \in B \times D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D) \end{aligned}$$

b) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
Es verdadero, en efecto, para la inclusión hacia la derecha tomamos un $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$, luego x está en $A \setminus B$, e y está en C, es decir en particular tenemos que $(x, y) \in A \times C$ y que $(x, y) \not{in} B \times C$, pues para estar ahí lo primero que uno pide es que $x \in B$ y con eso concluimos que $(A \setminus B) \times C \subseteq (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Para la otra inclusión, $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \notin (B \times C)$ Notemos que como y está en C, no puede estar en C, así que la única forma de que (x, y) no esté en $B \times C$ es que $x \notin B$ es decir $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$

c) $A^c \times D^c = (A \times D)^c$

R: Es falso, piense en el siguiente dibujo



En la primera parte el complemento es todo lo rayado, mientras que el producto cruz del complemento está señalado en rojo en la segunda parte y claramente son distintos.

P1) a)

- $\delta_E(x) : E \to \{0,1\}$

$$x \mapsto \delta_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

Pero esta función está definida $\forall x \in E$, por lo que $x \in E$ siempre

$$\boxed{\therefore \delta_E(x) = 1 \qquad \forall x \in E}$$

- $\delta_\emptyset(x) : E \to \{0, 1\}$

$$x \mapsto \delta_\emptyset(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \emptyset \\ 0 & \text{si } x \notin \emptyset \end{cases}$$

Pero nunca $x \in \emptyset$, ya que es vacío

$$\boxed{\therefore \delta_\emptyset(x) = 0 \qquad \forall x \in E}$$

b) $$\delta_{A \cap B} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \vee x \notin B \end{cases}$$

caso 1: si $x \in A \wedge x \in B$, $\delta_A(x) = 1 \wedge \delta_B(x) = 1 \Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 1$

caso 2: si $x \notin A$, $\delta_A(x) = 0 \Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 0$

caso 3: si $x \notin B$, $\delta_B(x) = 0 \Rightarrow \delta_B(x) \cdot \delta_A(x) = 0$

$$\Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \vee x \notin B \end{cases} = \delta_{A \cap B}$$

c) $\Rightarrow)$ Si $x \in C \Rightarrow x \in D$

Por lo que $\delta_C(x) = 1 \Rightarrow \delta_D(x) = 1$ y se cumple que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$

Si $x \notin C$, $\delta_C(x) = 0$. $\delta_D(x)$ podría ser 0 ó 1, pero en cualquier caso, $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$.

$$\therefore \quad C \subseteq D \Rightarrow \delta_C(x) \leq \delta_D(x) \quad \forall x \in E$$

$\Leftarrow)$ Sea $x \in C$

$\Rightarrow \delta_C(x) = 1 \leq \delta_D(x)$

$\Rightarrow \delta_D(x) = 1$

$\Rightarrow x \in D$

$$\therefore \quad \delta_C(x) \leq \delta_D(x) \Rightarrow C \subseteq D.$$

Por lo tanto se concluye que C es subconjunto de D, ssi delta(C) es menor o igual a delta(D)

d) P.D.Q $A = B \Leftrightarrow \delta_A = \delta_B$

Por (c)

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow \delta_A \leq \delta_B \wedge \delta_B \leq \delta_A \Leftrightarrow \delta_A = \delta_B$ //.

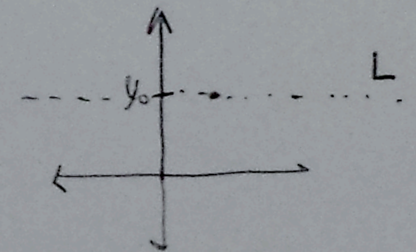
e) $E = \{a, b\}$ con $a \in A$ y $b \notin A$.

f) $A \neq E$ y $A \neq \emptyset$

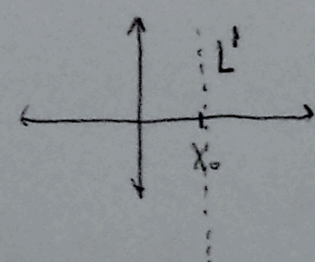
P6) P.D.Q $(\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2)(\exists (L, L') \in \mathcal{L}^2)$ tq' $\psi(L,L') = (x_0,y_0)$

es decir, para cualquier punto, existen 2 rectas que se cruzan ese punto.

Basta tomar $L: y = y_0$



y $L': x = x_0$



y estas 2 rectas siempre se intersectan en (x_0,y_0) $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.