MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Viernes 13 de Abril.

Auxiliar 4: Funciones con conjuntos

Resumen:

Sea $f : A \to B$ una función.

- f es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A)\ f(x) = y$.
- f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva.
- Si f es biyectiva, tiene inversa f^{-1}, y es tal que $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x)$.

P1. Sea U conjunto universo y $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(U)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es cerrado para la resta si

$$\forall X, Y \in \mathcal{F} \text{ se cumple que } X \setminus Y \in \mathcal{F}.$$

I) Demuestre que los siguientes conjuntos son cerrados para la resta.
   a) $\mathcal{P}(\{1,2\})$
   b) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \text{ solo contiene números pares }\} \cup \{\emptyset\}$

II) Demuestre que si $U \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es cerrado para la resta, entonces $\mathcal{F}$ es cerrado para el complemento, es decir $X \in \mathcal{F} \Rightarrow X^c \in \mathcal{F}$

P2. Sea E conjunto universo, y A, B contenidos en E fijos.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto f(X) = (X \cap A) \cup B \end{aligned}$$

Demuestre que la función es biyectiva si y solo si $A = E$, y $B = \emptyset$

P3. Discuta si son verdaderas las siguientes afirmaciones, en caso de serlo demuéstrelas, sino de un contraejemplo.

a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$
b) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
c) $A^c \times D^c = (A \times D)^c$

P4. Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto fijo. $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ se define la función caracterísitica de A como:

$$\begin{aligned} \delta_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Describa $\delta_E(x)$ y $\delta_\emptyset(x), \forall x \in E$.
(b) Demuestre que $\forall x \in E$ se tiene que $\delta_{A\cap B}(x) = \delta_A(x)\delta_B(x)$.
(c) Si $C, D \in \mathcal{P}(E)$ entonces $C \subseteq D \Leftrightarrow (\forall x \in E)\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$.
(d) Demuestre que $A = B \Leftrightarrow \delta_A = \delta_B$.
(e) Determine condiciones para que δ_A sea inyectiva.

(f) Determine condiciones para que δ_A sea sobreyectiva.

P5. *[Propuesto]* Para $a, b \in \mathbb{R}$ considere la recta $L_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = ax + b\}$ y la colección de rectas $\mathcal{L} = \{L_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^2 | a, b \in \mathbb{R}\}$. Se define el conjunto de pares de rectas no paralelas

$$\mathcal{H} = \{(L, L') \in \mathcal{L}^2 | L \cap L' \neq \emptyset, L \neq L'\}$$

y la función $\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\psi((L, L')) = (x_0, y_0)$, donde (x_0, y_0) es el único punto de intersección de L y L'. Pruebe que ψ es sobreyectiva.