(**P**1) Sean A, B dos conjuntos, pruebe que $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

Sol: Tenemos una equivalencia, por lo que hay que demostrarla para ambos lados.
$\Rightarrow$ Vamos a asumir que $A = B$, no lo vamos a cuestionar y tenemos que ver que se cumpla que $A \cap B = A \cup B$. En efecto $A \cap B = A \cap A = A$, por otro lado $A \cup B = A \cup A = A$, por lo tanto $A \cap B = A = A \cup B$, es decir $A \cap B = A \cup B$
$\Leftarrow$, ahora vamos a sumir $A \cap B = A \cup B$ y tenemos que llegar a que $A = B$, recordemos que LA FORMA MÁS EFICIENTE DE DEMOSTRAR QUE DOS CONJUNTOS SON IGUALES, ES CON LA DOBLE INCLUSIÓN, es decir demostrar que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$. ¿Y qué significa $A \subseteq B$?, es que TODOS LOS ELEMENTOS DE A ESTÁN EN B, es decir que si tomo un $x \in A$, tengo que hacer magia y concluir que $x \in B$. En efecto, sea $x \in A$, ¿Cómo voy a llegar a que está en B? tienes que utilizar la información que tienes, sabes que $A \cap B = A \cup B$, aah! como $x \in A$, necesariamente $x \in A \cup B$ pues ahí viven todos los de A y todos los de B, y por hipótesis concluyo que $x \in A \cap B$, que son todos los que están en A y en B, es decir $x \in B$! que era justo lo que quería, con esto concluyo que $A \subseteq B$, ahora notemos que en el enunciado no hay nada que diferencia A con B, no hay nada que uno cumpla que el otro no, son solo nombres, en estos casos uno no tiene que demostrar que $B \subseteq A$, sino que puede utilizar la frase "análogamente, podemos ver que $B \subseteq A$ " eso significa que esta otra demostración es exactamente igual, solo hay que cambiar las letras A por B, ojo NO SE PUEDE HACER SIEMPRE ESTO, solo cuando lo que cumple A es exactamente lo mismo que lo que cumple B. Concluimos que $A = B$.

Veamos el siguiente ej.

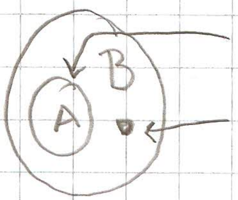
P1) $(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \Rightarrow X = Y$

Como tenemos que demostrar una igualdad de conjuntos utilizaremos el método más típico

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

¿Que significa eso?

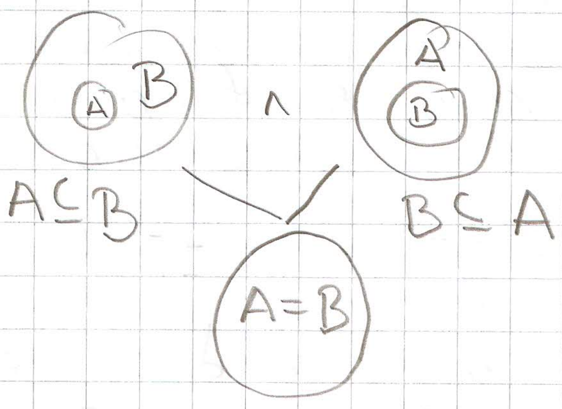
$A \subseteq B$ es A subconjunto de B o sea todo elemento de A está en B OJO QUE ESO <u>NO</u> SIGNIFICA QUE todo elemento de B está en A perfectamente B puede ser más grande que A



todo A está en B

ese está en B y no en A

sin embargo



(igual es lógico todo B está en A y todo A en B $\Rightarrow$ A = B)

Bueno volvamos al ejercicio,

PDQ: $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$

Vamos por partes

PDQ: $X \subseteq Y$ es decir $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$

como lo que tenemos que demostrar es un para todo (si hubiese al menos un elemento en X que no esté en Y, X no podría ser subconjunto de Y) no me sirve tomar un ejemplo sino que tengo que tomar uno cualquiera

Sea $x \in X$ veamos que $x \in Y$

¿Y ahora qué? bueno fijate que estás demostrando una implicancia la cual solo es falsa cuando $V \Rightarrow F$ es decir es verdadero que

$$X \cup A = Y \cup A \wedge X \cap A = Y \cap A$$

y como es verdadero es información que hay que usar.

Debes recordar que

$$\underbrace{X \cap A} \subseteq \underset{\omega}{X} \subseteq \underbrace{X \cup A}$$

acá viven todos los que viven tanto en X como en A
EN AMBOS

acá viven todos los que están en X o en A
EN CUALQUIERA DE LOS DOS

entonces dijimos sea $x \in X$

¿Cual uso $X \cup A$ ó $X \cap A$?
Piensalo ¿en cuál de las dos estás seguro que x tambien está? en $X \cup A$!
(¿por que no $X \cap A$? pues porque por ahora nada me dice que ese x tambien vive en A)

$\Rightarrow x \in X \cup A = Y \cup A$

$\Rightarrow x \in Y \cup A \Leftrightarrow x \in Y \vee x \in A$

en general cuando se llega a una unión es necesario ponerse en casos pues de lo único que estoy seguro es que está en alguno de los dos ¿En cuál? ni idea, quizás esté en ambos, quizás sólo en Y, quizás solo en A.

caso 1] $x \in A$

¿y ahora? siempre que llegues a un punto donde pareciera que no hay nada que hacer revisa la información que tienes, la que no haz usado.

¿$X \cap A = Y \cap A$? para vivir ahí x tiene que estar tanto en X como en A ¡Pero si ese es justo el caso!

$\Rightarrow x \in X \cap A = Y \cap A$

$\Rightarrow x \in Y \cap A \Rightarrow x \in A \wedge \boxed{x \in Y}$

fijate tomaste un x CUALQUIERA que estaba en X y ahora está en Y

$\Rightarrow X \subseteq Y$, pero aún falta el otro caso...

Caso 2] $x \in Y$

¿y ahora? NADA fijate ya llegaste!

$\Rightarrow X \subseteq Y$

Veamos ahora que $Y \subseteq X$

pero si te fijas tu tienes exactamente la misma información de X y de Y es decir la demostración sería exactamente igual cambiando las letras "X" por "Ys". y viceversa.

Y ahora es cuando uno usa la frase mágica

Análogamente se tiene $Y \subseteq X$

$\Rightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow Y = X$ //

OJO PARA USAR LA FRASE ANALOGAMENTE TIENES QUE ESTAR SEGURO QUE TIENES EXACTAMENTE LA MISMA INFORMACIÓN

El resumen em matemáticas

Sea $x \in X \overset{\text{propiedad conocida}}{\Rightarrow} x \in X \cup A \overset{\text{hipótesis}}{\Rightarrow} x \in Y \cup A$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in Y \vee x \in A$

si $x \in Y \Rightarrow X \subseteq Y$ //

si $x \in A$ como $x \in X \Rightarrow x \in X \cap A \overset{\text{Hip.}}{\Rightarrow} x \in Y \cap A$
$\Rightarrow \underline{\underline{x \in Y}} \wedge x \in A$

$\Rightarrow X \subseteq Y$

análogamente $Y \subseteq X \Rightarrow \boxed{X = Y}$ // se tiene lo pedido

P2

a) $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = \underbrace{C \setminus (B \cup (C \setminus A))}$

$x \setminus y = x \cap y^c$ $= C \cap (B \cup (C \cap A^c))^c$

De morgan $= C \cap (B^c \cap (C \cap A^c)^c)$

De morgan $= C \cap B^c \cap (C^c \cup A)$

conmutatividad $= B^c \cap C \cap (C^c \cup A)$

distributividad $= B^c \cap ((C \cap C^c) \cup (C \cap A))$

pdad apunte $= B^c \cap (\phi \cup (C \cap A))$

pues $A \subseteq C$ $= B^c \cap (C \cap A)$

$= B^c \cap A$

conmutatividad $= A \cap B^c$

pdad. apunte $= A \setminus B$ //

b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

Primera forma

$(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$

$= (A \cup A) \cap (A \cup C^c) \cap (B^c \cup A) \cap (B^c \cup C^c)$ distrib.

$= A \cap (A \cup C^c) \cap (A \cup B^c) \cap (B^c \cup C^c)$ commut.

NOTEMOS QUE $A \cup X \supseteq A$ sea cual sea la cosa, por lo tanto $(A \cup X) \cap A = A$ $\forall X$

$= A \cap (A \cup B^c) \cap (B^c \cup C^c)$

$= A \cap B^c \cup C^c$ (mismo argumento)

$= A \cap (B \cap C)^c$ (de morgan)

$= A \setminus (B \cap C)$ //

segunda forma

$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

$\supseteq$ | sea $x \in A \setminus (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$
si $x \notin B \Leftrightarrow x \in A \setminus B \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
si $x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$\therefore A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$\subseteq$ | sea $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$
en cualquiera de los dos casos $x \in A$
si $x \notin B \Rightarrow x \notin (B \cap C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$
si $x \notin C \Rightarrow x \notin (B \cap C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$

$\therefore (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$

$\therefore (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus B \cap C$ //

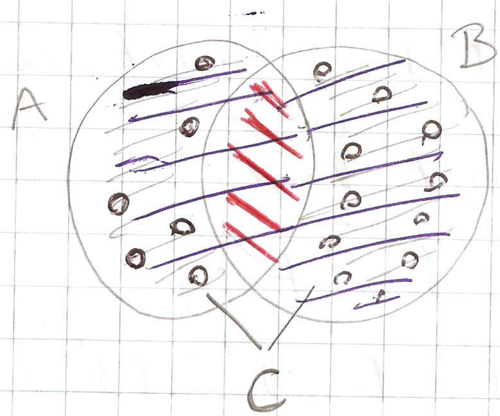
tercera forma

$(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$
$= A \cap (B^c \cup C^c)$ (distributividad o "factorizar")
$= A \cap (B \cap C)^c$ de morgan
$= A \setminus (B \cap C)$ //

c) $A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$

Demos una pequeña intuición primero recordando que

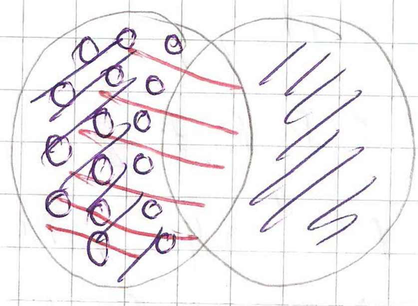
$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap C)$



$A \cup B$

$A \cap B$

$A \Delta B = C$



C

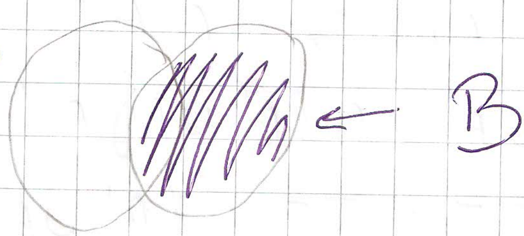
A

$\Rightarrow A \cup C = \text{TODO}$

$A \cap C$

$\Rightarrow B = \text{TODO} \setminus$ o

$\Rightarrow$



Y AHORA MATEMÁTICAS

$$A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$$

$$(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = C$$

$$\Rightarrow A \Delta C = A \setminus C \cup C \setminus A.$$

$$A \setminus C = A \cap C^c = A \cap \left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \right)^c$$

$$= A \cap \left((A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c \right)$$

$$= A \cap \left((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A) \right)$$

$$= A \cap \left((A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap A) \cup (B \cap B^c) \cup (B \cap A) \right)$$

$$= A \cap \left((A^c \cap B^c) \cup (B \cap A) \right)$$

$$= (A \cap A^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap A)$$

$$= A \cap B \quad (\text{pues } A \cap A^c = \phi \text{ y } X \cup \phi = X)$$

$$C \setminus A = \left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \right) \cap A^c$$

$$= \left((A \cup B) \cap (A \cup A^c) \cap (B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \right) \cap A^c$$

$$= \left((A \cup B) \cap U \cap U \cap (B^c \cup A^c) \right) \cap A^c$$

$$= \left((A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \right) \cap A^c$$

$$= (A \cup B) \cap A^c = (A^c \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

$$= B \cap A^c$$

finalmente $(A \cap B) \cup (B \cap A^c) = B \cap (A \cup A^c) = B$

P3

$\forall X, Y \in P(U)$ Razonemos por contradicción

$$\underbrace{(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y)}_{V} \Rightarrow \underbrace{A = \phi}_{F}$$

como $A \neq \phi \Rightarrow \exists x_0 \in A$

Como la hipótesis se cumple para TODO X, Y se me tiene que ocurrir algún X y algún Y que cumplan que al unirse a A sean iguales pero que sean distintos mmm...

En general estos problemas no piden que te inventes algo muy complicado siempre es del estilo vacío o un singleton o Universo, en este caso si tomamos

$X = \{x_0\} \wedge Y = \phi$

$A \cup X = A = A = A \cup \phi$ pues el x_0 ya estaba en A y cuando agrego vacío no pasa nada

y es claro que $X \neq Y$ —

$$\Rightarrow (\underbrace{A \cup X = A \cup Y}_{V} \Rightarrow \underbrace{X = Y}_{F}) \Rightarrow F \Rightarrow \Leftarrow$$

PROARTE

$(A \cup B) \in P(C \cap D) \Rightarrow A \in P(C) \wedge B \in P(C)$

recordemos primero el concepto de partes

$X \in P(Y) \Leftrightarrow X \subseteq Y$

es decir si X es subconjunto

Ej: $Y = \{1,2\}$

$\Rightarrow 1 \in P(Y)$ NO!

$\{1\} \in P(Y)$ SÍ!

$P(Y) = \{\underline{\phi}, \{1\}, \{2\}, \underline{\{1,2\}}\}$

SIEMPRE EL VACIO Y EL CONJUNTO MISMO PERTENECEN A LAS PARTES pues

$\forall A \quad \phi \subseteq A \quad \wedge \quad A = A \Leftrightarrow A \subseteq A \wedge A \subseteq A$

ADEMÁS si $C \subseteq A$, $B \subseteq C$

$C \in P(A)$, $B \in P(C)$

$\Rightarrow B \in P(A)$

$B \subseteq A$

es decir si yo estoy en las partes de A TODOS MIS SUBCONJUNTOS TAMBIÉN ESTÁN

Volviendo al ejercicio

$A \cup B \in P(C \cap D) \Rightarrow A \in P(C) \wedge B \in P(C)$

Recordemos que la única forma que esto sea falso es $V \Rightarrow F$ por lo tanto lo primero es verdad. es información que HAY QUE USAR.

$A \cup B \in P(C \cap D)$

$$A \cup B \subseteq C \cap D$$

como dije antes $A \subseteq A \cup B \subseteq C \cap D$

$\Rightarrow A \subseteq C \cap D$ (todos los elementos de A están en C y D)

en particular

$$A \subseteq C \Leftrightarrow A \in P(C)$$

de la misma forma $B \subseteq A \cup B \subseteq C \cap D$

$$\Rightarrow B \subseteq C \cap D$$

$$\Rightarrow B \in P(C \cap D) \quad //$$

∴ $A \cup B \in P(C \cap D) \Rightarrow A \in P(C) \wedge B \in P(C)$

es verdadero.

P4)

$A \cap B = \phi \iff P(A) \cap P(B) = \{\phi\}$

esto es equivalente a

$A \cap B \neq \phi \iff P(A) \cap P(B) \neq \{\phi\}$

$A \cap B \neq \phi \iff \exists\, x_0 \in A \cap B$

$\iff \exists\, x_0$ tq $x_0 \in A \wedge x_0 \in B$

$\iff \exists\, x_0$ tq $\{x_0\} \subseteq A \wedge \{x_0\} \subseteq B$

$\iff \exists\, x_0$ tq $\{x_0\} \in P(A) \wedge \{x_0\} \in P(B)$

$\iff \exists\, x_0$ tq $\{x_0\} \in P(A) \cap P(B)$

• $\implies P(A) \cap P(B) \neq \{\phi\}$

si bien • pareciera ser una equivalencia y no un implica falta cubrir un caso

¿$P(A) \cap P(B) = \phi$?

JAMÁS PUES siempre al menos el vacío está en las partes

y AHORA sí $P(A) \cap P(B) \neq \{\phi\}$
$\implies \exists\, x_0$ tq...

Continuar hacia arriba.

$\therefore A \cap B = \phi \iff P(A) \cap P(B) = \{\phi\}$
es verdadero