MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Viernes 22 de Marzo del 2018

Auxiliar 2: Inducción

Resumen:

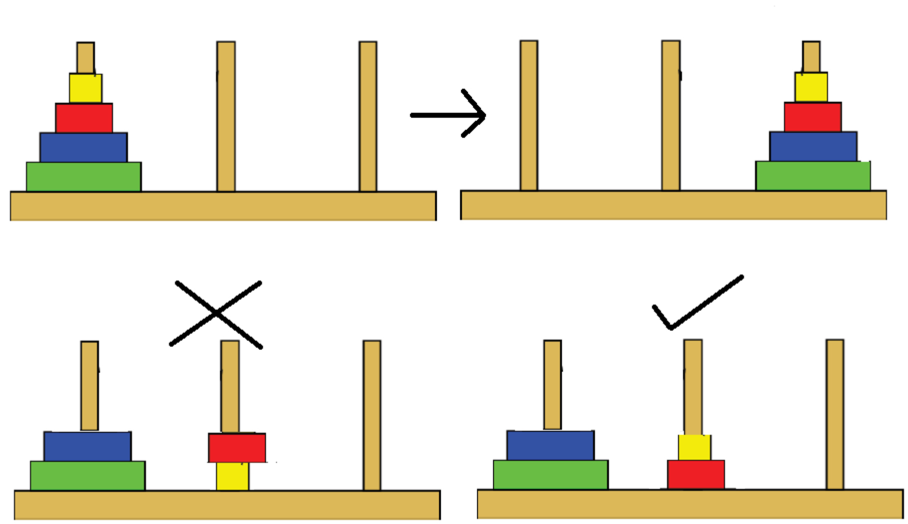
- Inducción **primera forma**

$$[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(p(n) \Rightarrow p(n+1))].$$

- Inducción **segunda forma**

$$[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)\{[(\forall k, n_0 \leq k \leq n)p(k)] \Rightarrow p(n+1)\}].$$

P1. Una "torre de Hanoi.^es un juego consistente de n anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero A,B,C, alineadas de izquierda a derecha, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en la estaca A, apilados de mayor a menor, es decir, formando una pila cónica. El juego consiste en trasladar los anillos a la estaca C, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que cada vez se puede mover un solo anillo para ubicarlo en otra estaca y si en esta hay otros anillos ellos deben ser de mayor diámetro, es decir, en toda etapa del juego en cada estaca debe haber una pila cónica.



Demostrar que la cantidad de pasos mínimos para ganar el juego está dado por la expresión:

$$p(n) = 2^n - 1$$

P2. Demuestre por inducción que $\forall n \geq 0$ el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13.

P3. Recuerde que la sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, ..., F_n, F_{n+1}...$ que cumplen que:

$$\begin{array}{rcl} F_0 & = & 0 \\ F_1 & = & 1 \\ F_n & = & F_{n-1} + F_{n-2} \ \forall n \geq 2 \end{array}$$

Demuestre que:

(I) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1, \ \forall n \geq 1$

(II) $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \ \forall n \geq 6$

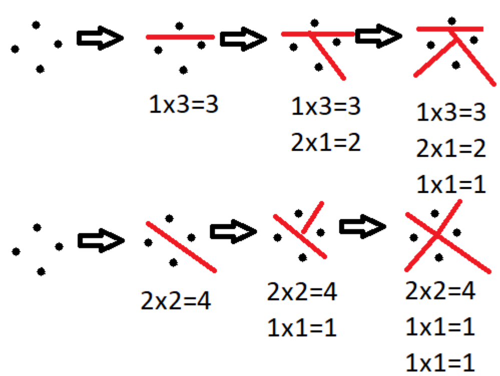
P4. Demuestre que $(\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x \ p(x))]$ es verdadera cualquiera sea la función proposicional p.

P5. Demuestre por inducción que $(\forall n \geq 1) \ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$.

P6. *[Propuesto]* El teorema fundamental de la aritmética nos dice que todo número natural se puede escribir como el producto de factores primos. Usando inducción fuerte demuestre este teorema.

P7. *[Propuesto]* Tome n bolitas, divídalas en dos grupos, de la cantidad que usted quiera, anote en un papel cuantas quedan en cada lado y su multiplicación. Luego subdivida uno de los grupos en dos y anote en el papel cuantas quedan en cada subgrupo y su multiplicación, y reitere hasta que queden solos grupos de 1, luego sume las multiplicaciones, le apuesto que le dará $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ejemplo, con 4 bolitas la suma es 6, tal como se puede ver en la siguiente:



P8. *[Propuesto]* Suponga que tiene un n-gono convexo (polígono de n lados cuyas diagonales siempre están adentro). Demuestre que: la cantidad de diagonales está dada por la expresión: $\frac{n(n+3)}{2}$
Indicación general para la pregunta: A veces tirar una linea es una buena idea.