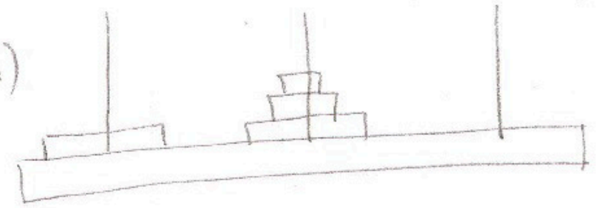
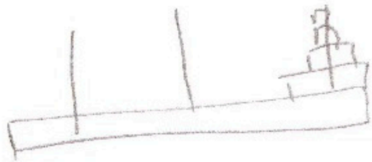
P1) tenemos

COMO NUNCA PODEMOS TENER UN GRANDE SOBRE UN CHICO NECESARIAMENTE TENGO QUE LOGRAR ESTA SITUACIÓN

(*)

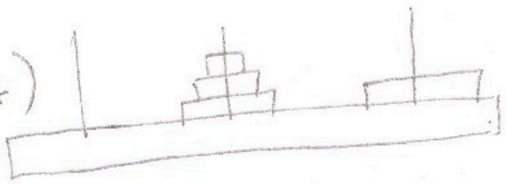


Y ASÍ



(***)

(**)



$\Rightarrow$

ES DECIR PARA MOVER "n+1" TENGO QUE MOVER "n" DISCOS A LA SEGUNDA MOVER EL n+1 A LA TERCERA Y LUEGO VOLVER A MOVER LOS "n" A LA TERCERA

SI LLAMAMOS $P(n+1)$ A LA CANTIDAD DE MOVIMIENTOS necesarios para mover n+1 discos tenemos

$$P(n+1) = \underset{(*)}{P(n)} + \underset{(**)}{1} + \underset{(***)}{P(n)}$$

$$P(n+1) = 2P(n) + 1$$

ESTO ES LO QUE LLAMAMOS UNA SUCESIÓN RECURRENTE CUANDO MI ESTADO DEPENDE DEL ANTERIOR

POR EJEMPLO si $P(n) = 6$

$\Rightarrow P(n+1) = 13$

$\Rightarrow P(n+2) = 27$

$\Rightarrow P(n+3) = 55$

$\Rightarrow P(n+100) = ?$

NO ME DIGAS QUE TENGO QUE CALCULAR TODOS LOS $P(n+4), \ldots, P(n+99)$ LA VERDAD ES QUE ESA ES UNA OPCIÓN, LA OTRA ES APRENDER QUE TODA SUCESIÓN RECURRENTE PUEDES ESCRIBIRLA COMO UNA SUCESIÓN NO RECURRENTE (ESTO LO ESTUDIARÁN MÁS EN CÁLCULO)

así SIEMPRE

fórmula recurrente = fórmula no recurrente.

EN ESTE CASO QUEREMOS VER QUE

$$P(n) = 2^n - 1$$

¿Y CÓMO SE ME HIBA A OCURRIR ESO? TRANQUILO EN ESTE CURSO SIEMPRE TE DARÁN LA FÓRMULA, LO QUE NOSOTROS HAREMOS ES DEMOSTRAR QUE EFECTIVAMENTE SON LO MISMO Y PARA ELLO USAMOS INDUCCIÓN (LA RESPUESTA A LA PREGUNTA RECIÉN COMIENZA, LO OTRO FUE INTRODUCCIÓN FREAK).

PDQ: $P(n) = 2^n - 1$

CASO BASE: $P(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ //

ESTO ES VERDAD PUES PARA MOVER 0 DISCOS DEBO HACER 0 MOVIMIENTOS.

HI: $P(n) = 2^n - 1$

UNO ASUME QUE SE CUMPLE PARA n, Y VÉ QUE PASA PARA $n+1$

Pero subemos que

$$P(n+1) = 2P(n) + 1$$ uno usa la HI.

$$= 2(2^n - 1) + 1$$

$$= 2 \cdot 2^n - 2 + 1$$

$$= 2^{n+1} - 2 + 1$$

$$= 2^{n+1} - 1 \quad //$$

$\therefore$ se cumple para el caso base, y cada vez que se cumple para un "n" se cumple para "n+1"

$\therefore$ se tiene $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esto es el PPO. de Inducción.

P2) PDQ: $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13

CB: $n=0$, $4^{2\cdot 0+1} + 3^{0+2} = 4 + 9 = 13 = 13 \cdot 1$

HI: $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13K$ con $K \in \mathbb{Z}$

(recuerda que a es multiplo de b si b multiplicado por un entero da a, por ej -21 es múltipló de 7 pues $7 \cdot -3 = -21$)

PDQ: $4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2} = 13H$, $H \in \mathbb{Z}$

LOS PROBLEMAS POR INDUCCIÓN SON TODOS IGUALES: TOMAR LO QUE HAY QUE DEMOSTRAR, MATRAQUEAR, Y USAR MAGIA PARA HACER APARECER LA HI.

TRUCO TÍPICO, TEOREMA:

NIKITA-NIPONE: $x + -x = 0$ (NN para los amigos)

$\Rightarrow a + x + -x = a$

$$4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2}$$

$$= 4^{2n+2+1} + 3^{n+1+2}$$

$$= 4^{2n+3} + 3^{n+3}$$

mmm... mí HI es $4^{2n+1} + 3^{n+2}$

COMO QUE EL EXPONENTE ES CASI IGUAL

$$= 4^{2n+1+2} + 3^{n+3}$$

$$= 4^{2n+1} \cdot 4^2 + 3^{n+3}$$

$$= 16\left(4^{2n+1}\right) + 3^{n+3}$$

mmm... EL EXPONENTE YA ES IGUAL!

AHORA SOLO HAY QUE ARREGLAR EL DEL 3! !! NO!

YO NECESITO QUE 3^{n+2} ESTÉ SUMANDO AL 4^{2N+1} NO a $16(4^{2n+1})$

Y AHORA ES CUANDO USAMOS NN.

$$= 16\left(4^{2n+1} + 3^{n+2} - 3^{n+2}\right) + 3^{n+3}$$

$$= 16\underbrace{\left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right)} - 16\cdot 3^{n+2} + 3^{n+3}$$

Y AHORA SÍ TENEMOS LA HI !!

$$= 16\cdot 13K - 16\cdot 3^{n}\cdot 9 + 3^{n}\cdot 27$$

$$= 16\cdot 13K - 3^{n}\left(16\cdot 9 - 27\right)$$

$$= 16\cdot 13K - 3^{n}\cdot 9\cdot 13$$

$$= 13\underbrace{\left(16\cdot 3K - 9\cdot 3^{n}\right)}$$

fijate que por muy feo que sea eso son ENTEROS! y álgebra de ENTEROS DA ENTERO

$$= 13\,H \ //$$

OTRA FORMA SI NO TE GUSTA EL NN

$$16\left(4^{2n+1}\right) + 3^{n+3} = \overbrace{16}^{13+3}\left(4^{2n+1}\right) + 3\left(3^{n+2}\right)$$

$$= 3\cdot 4^{2n+1} + 3\cdot 3^{n+2} + 13\cdot 4^{2n+1} = 3\left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right) + 13\cdot 4^{2n+1}$$

$$= 3\cdot 13K + 13\cdot 4^{2n+1} = 13\,H \ //$$

P5

, $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

CB $n = 0$

$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x = 1$ ✓ //

HI $(1+x)^n \geq 1 + nx$

PDQ: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \quad (HI)$$

$$\geq (1+nx)(1+x) \quad \triangle$$

$$= 1 + nx + x + nx^2$$

$$= 1 + x(n+1) + \underbrace{nx^2}_{\text{ALGO POSITIVO!}}$$

$$\geq 1 + x(n+1) \quad //$$

$\therefore (1+x)^n \geq 1 + nx$ //

OJO! $\triangle$ ES VERDAD SOLO PORQUE $x \geq -1 \Rightarrow x + 1 \geq 0$
CUANDO TENGO DESIGUALDADES POSITIVAS SE PUEDEN MULTIPLICAR Y SE MANTIENE LA DESIGUALDAD.

- Demuestre que $(\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x p(x))]$ es verdadera cualquiera sea la función proposicional p.

  Sol: Tenemos dos casos, el primero es que $\forall x p(x)$ sea verdadera, en ese caso la llegada de la implicancia es verdadera y por lo tanto lo es en total, en caso de que sea falsa es que existe un elemento tal que p(x) es falsa, luego tomamos ese elemento como y, con esto la implicancia será de la forma $F \Rightarrow F$ es decir verdadera.

- Recuerde que la sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, ..., F_n, F_{n+1}...$ que cumplen que:

$$\begin{array}{lcc} F_0 & = & 0 \\ F_1 & = & 1 \\ F_n & = & F_{n-1} + F_{n-2}\ \forall n \geq 2 \end{array}$$

  Demuestre que:

  (I) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,\ \forall n \geq 1$

  DEM: Caso base $n = 1$, reemplazamos y queda $F_1 = F_3 - 1$ ¿Quién es F_3?, bueno utilicemos la recurrencia. $F_3 = F_2 + F_1 = F_2 + 1$ ¿Quién es F_2? $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$, así $F_3 = 2$ y efectivamente se cumple que $F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$.

  HI: Asumimos que para algún n se cumple que $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

  PI: PDQ: $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n+1} = F_{(n+1)+2} - 1$

  DEM: Como en toda inducción la idea es hacer aparecer la HI, veamos como hacerlo

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n+1} = \underbrace{F_1 + F_2 + \cdots + F_n}_{HI} + F_{n+1}$$

$$= (F_{n+2} - 1) + F_{n+1} = (F_{n+2} + F_{n+1}) - 1 = F_{n+3} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1$$

  (II) $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},\ \forall n \geq 6$

  DEM: Caso base $n = 6$, $F_6 = 8 > \left(\frac{3}{2}\right)^5 \sim 7{,}5$

  HI Asumimos que para algún n se cumple que $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

  PI: PDQ: $F_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{(n+1)-1}$

  Nuevamente se trata de hacer aparecer la HI, naturalmente $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + F_{n-1}$ ¿Y qué hacemos ahora? la HI no tiene ningún F_{n-1} : (. Tranquilidad existe otro principio de inducción que nos da una hipótesis más fuerte, que nos permite cambiar nuestra HI por HI' Asumimos que para algún n se cumple que $F_k > \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$, $\forall k \leq n$, es decir ahora asumimos que se cumple para todos los anteriores a n ¿Y cómo se me iba a ocurrir utilizar eso? Netamente porque apareció un n menor que el de la HI, no teníamos como saberlo antes. Bueno utilizando HI'

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\left(\frac{10}{9}\right) > \left(\frac{3}{2}\right)^{n}$$

$$\text{Así: } F_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{(n+1)-1}$$

- El teorema fundamental de la aritmética nos dice que todo número natural mayor que 1 se puede escribir como el producto de factores primos. Usando inducción fuerte demuestre este teorema.

  DEM: Caso base, el primer natural mayor que 1 es el 2, el 2 es primo y se escribe así tal cual.

  HI: Seguimos la recomendación del enunciado y utilizamos inducción fuerte, es decir asumimos que hay un natural tal que todos los naturales anteriores se pueden escribir como multiplicación de primos.

  PI: Veamos que pasa con $n+1$, bueno $n+1$ tiene dos posibilidades, la primera es que sea primo en cuyo caso estamos listo porque se escribe simplemente como $n+1$. Si no es primo por definición existen p y q tales que $pq = n+1$, ah pero como p y q son estrictamente menores que $n+1$, podemos aplicarles la HI, existen $r_1, ..., r_k, l_1, ...l_j$ todos primos tales que $p = r_1 \cdot r_2 \cdots r_k$ y $q = l_1 \cdot l_2 \cdots l_j$, luego $n+1 = r_1 \cdot r_2 \cdots r_k \cdot l_1 \cdot l_2 \cdots l_j$ que era exactamente lo que queríamos.

- Demuestre por inducción que $(\forall n \geq 1)\ 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n+1}$.

  DEM: Caso base $n = 1$, $1 \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+1}$

  HI: Asumimos que para algún n se cumple que $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n+1}$.

  PI: PDQ: $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(n+1)+1}$.

  Tal como lo hemos hecho todo el rato, la idea es hacer aparecer la HI:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} = \underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{HI} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{3}{2} - \frac{n}{(n+1)^2}$$

  Uuuuy casi, si tan solo hubiese habido un $\frac{1}{(n+2)}$ en vez de $\frac{n}{(n+1)^2}$. Bueno pero a ti no te interesa que esas cosas sean iguales, solo quieres una cota! Es decir basta ver que $\frac{3}{2} - \frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{(n+2)}$ para concluir, centrémonos en esto

$$\frac{3}{2} - \frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{(n+2)} \Leftrightarrow -\frac{n}{(n+1)^2} \geq -\frac{1}{(n+2)} \Leftrightarrow \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+2)}$$

  Como estamos trabajando en $\mathbb{N}$ n+2 es positivo, podemos pasar multiplicándolo!

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 \Leftrightarrow V$$

  Así: $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{n}{(n+1)^2} \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(n+2)} \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(n+2)}$