

Guía de Álgebra
Control N° 2
Dinámicas.

FOTOCOPIAS INTEGRAL
ALMIRANTE LATORRE 752
FONO: 671 9308

P1] Sea $q \in (0, 1)$. Se define $f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por
$$f(m) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} k (q-1)^k$$

Muestre que $|f(m)| \leq q^{m-1} \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Solución:

$$\begin{aligned} f(m) &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} k (q-1)^k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} k (q-1)^k \\ &\quad \text{El primer término (k=0) vale 0} \quad \text{Simplificando y reescribiendo algunas cosas} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} \left[\frac{m!}{k!(m-k)!} \right] k (q-1)^k = \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(k-1)!((m-1)-(k-1))!} (q-1)^{k-1} (q-1) \\ &= \left[\sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} (q-1)^{k-1} \right] (q-1) = \left[\sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} (q-1)^h \right] (q-1) \\ &\quad \text{Cambio de índice} \\ &= \left[\sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} (q-1)^h \right] (q-1) = ((q-1) + 1)^{m-1} (q-1) \\ &\quad \text{Formamos el binomio de Newton} \\ &= q^{m-1} (q-1) \end{aligned}$$

$$\therefore |f(m)| = |q^{m-1}| |q-1| < q^{m-1} \quad \text{pues } |q^{m-1}| = q^{m-1} \ (q > 0) \text{ y } |q-1| < 1 \ (q \in (0, 1))$$

P2] Se define $\chi_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$
Pruebe que:

$$(a) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{m+1}$$

(Control N° 2, 2000)

$$(b) \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -\chi_m$$

Nota: (a) se pide demostrar por una inducción

Solución:

$$(a) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$\text{No go aparecen el } m+1 = \sum_{k=0}^m \frac{1}{m+1} \left[\frac{m! (m+1)!}{(k+1)! (m-k)!} \right] (-1)^k$$

$$= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} (-1)^k = \frac{-1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} (-1)^{k+1}$$

(2)

Analicen esta igualdad

$$\frac{-1}{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k = \frac{-1}{m+1} \left[\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k - \binom{m+1}{0} (-1)^0 \right]$$

corrimiento de índice

Por BINOMIO de Newton (*)

$$= \frac{-1}{m+1} \left[\underbrace{(-1+1)^{m+1}}_{-1} - 1 \right] = \frac{1}{m+1}$$

(*) Recordar que

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m$$

(b) Por inducción

Para $m=1$, $\sum_{k=1}^1 \binom{1}{k} \frac{(-1)^k}{k} = \binom{1}{1} \frac{(-1)^1}{1} = -1$ y $-H_1 = -\left(\frac{1}{1}\right) = -1$ ✓

Ahora si la hipotesis se cumple para algún $m \geq 1$, o sea

$$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -H_m$$

probaremos que se cumple para $m+1$, o sea

$$\sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -H_{m+1}$$

En efecto:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^m \frac{\binom{m+1}{k} (-1)^k}{\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}} + \binom{m+1}{m+1} \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}$$

el término con $k=m+1$ de la sumatoria

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{k}}_{-H_m} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}$$

(Por hipotesis)

$$= -H_m + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}$$

corrimiento índice

$$= -H_m + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}}_{= (-1)^m \int_0^1 \frac{1-x^m}{1-x} dx} + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}$$

$$= -\left(H_m + \frac{1}{m+1} \right) = -H_{m+1} \quad \square$$

H_{m+1}

P3) Calcular:

(3)

(i) $\sum_{k=1}^m \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ (ii) $\sum_{k=m}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ ($m \leq m$)

(iii) $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!(m-k)!}$ (iv) $\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k(k+1)} + k\sqrt{k+1}}$

($m \geq 2$)

(v) $\sum_{k=1}^m k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Nota: (ii) y (iii) son del
Control 2, 1997
y (iv) del Control 2, 1998

Solución:

(i) $\sum_{k=1}^m \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^m \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right] = 1 - \frac{1}{(m+1)^2} \quad \square$

(ii) $\sum_{k=m}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=m}^{\infty} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=m}^{\infty} [\log(k+1) - \log(k)] = \log(m+1) - \log(m)$
 $= \log\left(\frac{m+1}{m}\right) \quad \square$

(iii) $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} = \frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} - \binom{m}{0} - \binom{m}{m} \right]$
 $= \frac{1}{m!} (2^m - 2) \quad \square$

(iv) $\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k(k+1)} + k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}$
 $= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}((k+1) - k)} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$
 $= 1 - \frac{1}{\sqrt{m+1}} \quad \square$

(v) $\sum_{k=1}^m k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^m k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^m k \ln(k+1) - k \ln k$
 $= \sum_{k=1}^m (k+1) \ln(k+1) - \ln(k+1) - k \ln k$
 $= \sum_{k=1}^m [(k+1) \ln(k+1) - k \ln k] - \sum_{k=1}^m \ln(k+1)$
 $= (m+1) \ln(m+1) - 1 \cdot \ln 1 - [\ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(m+1)]$
 $= (m+1) \ln(m+1) - \ln((m+1)!) = \ln((m+1)^{m+1}) - \ln((m+1)!)$
 $= \ln\left(\frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!}\right) = \ln\left(\frac{(m+1)^m}{m!}\right) \quad \square$

Simplificando los (m+1)

P4] (a) Sean $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dos secuencias de números reales. Considere los naturales p y m tal que $p \leq m$.

(4)

Pruebe que:

$$\sum_{k=p}^m (a_{k+1} - a_k) b_k = a_{m+1} b_{m+1} - a_p b_p + \sum_{k=p}^m a_{k+1} (b_{k+1} - b_k)$$

(b) Calcule en función de H_m el valor de $\sum_{k=2}^m \frac{H_k}{k(k-1)}$

donde $H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$

Solución:

(a) $\sum_{k=p}^m (a_{k+1} - a_k) b_k = \sum_{k=p}^m [a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k + \overbrace{a_{k+1} b_k - a_{k+1} b_{k+1}}^{a_{k+1} (b_k - b_{k+1})}]$
 $= \sum_{k=p}^m [a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k] - \sum_{k=p}^m a_{k+1} (b_{k+1} - b_k)$
 $= a_{m+1} b_{m+1} - a_p b_p + \sum_{k=p}^m a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) \quad \square$

(b) Notemos que $\sum_{k=2}^m \frac{H_k}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) H_k = - \sum_{k=2}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) \underbrace{H_k}_{b_k}$

Por (a)

$$= - \left[\frac{1}{m} H_{m+1} - \frac{1}{1} \cdot H_2 - \sum_{k=2}^m \frac{1}{k} (H_{k+1} - H_k) \right]$$

$$= - \frac{1}{m} H_{m+1} + \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=2}^m \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}$$

$$= - \frac{1}{m} \left(H_m + \frac{1}{m+1} \right) + 2 - \frac{1}{m+1}$$

$$= - \frac{1}{m} H_m + 2 - \frac{1}{m+1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) = - \frac{1}{m} H_m + 2 - \frac{1}{m+1} \left(\frac{m+1}{m} \right)$$

$$= 2 - \frac{1}{m} (1 + H_m) \quad \square$$

Otra forma de resolver (b) es la siguiente:

$$\sum_{k=2}^m \frac{H_k}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^m H_k \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^m \left(\frac{H_{k-1}}{k-1} - \frac{H_k}{k} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^m \left[\frac{H_{k-1}}{k-1} - \frac{H_k}{k} + \frac{1}{(k-1)k} \right] = \sum_{k=2}^m \left[\left(\frac{H_{k-1}}{k-1} + \frac{1}{k-1} \right) - \left(\frac{H_k}{k} + \frac{1}{k} \right) \right]$$

$$= \left(\frac{H_1}{1} + \frac{1}{1} \right) - \left(\frac{H_m}{m} + \frac{1}{m} \right) = 2 - \frac{1}{m} (H_m + 1) \quad \square$$

(Notar que no usamos (a))

P5 (a) Pruebe sin usar inducción que para $m \geq 1$, $0 \leq k \leq m$, $\binom{m}{k} \leq \frac{m^k}{k!}$ y deduzca que $(1 + \frac{1}{m})^m \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$ (5)

(b) Sea $S = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + \dots + (1+b+\dots+b^m)q^m$,

donde $m \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}$, $q, b \neq 1$. Escribir S como una expresión de dos sumatorias y calcularlas y (Control 2, 1997)

Solución:

$$(a) \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{\overbrace{m(m-1)\dots(m-k+1)}^{k \text{ números}}}{k!} \leq \frac{\overbrace{m \cdot m \dots m}^{k \text{ veces}}}{k!} = \frac{m^k}{k!}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k 1^{m-k} \leq \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!} \cdot \frac{1}{m^k} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \quad \square$$

$$(b) S = \sum_{j=0}^m (1+b+\dots+b^j) q^j = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^j b^i \right) q^j = \sum_{j=0}^m \frac{1-b^{j+1}}{1-b} q^j \quad \leftarrow b \neq 1.$$

$$= \frac{1}{1-b} \sum_{j=0}^m \frac{(1-b^{j+1}) q^j}{q^j - b(bq)^j} = \frac{1}{1-b} \left[\sum_{j=0}^m q^j - b \sum_{j=0}^m (bq)^j \right]$$

$$= \frac{1}{1-b} \left[\frac{1-q^{m+1}}{1-q} - b \frac{1-(bq)^{m+1}}{1-bq} \right] \quad \begin{matrix} \leftarrow q \neq 1 \\ \leftarrow \text{Notamos que} \\ \text{debemos pedir} \\ \text{que } bq \neq 1 \end{matrix}$$

P6 Sean p, q reales no negativos tales que $p+q=1$

Calcular $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^k q^{m-k} k^2$ Hint: $k^2 = k^2 - k + k$

Solución:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^k q^{m-k} k^2 &= \sum_{k=0}^m k(k-1) \binom{m}{k} p^k q^{m-k} + \sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} p^k q^{m-k} \\ &= \sum_{k=2}^m k(k-1) \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k q^{m-k} + \sum_{k=1}^m k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k q^{m-k} \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{m!}{(k-2)!(m-k)!} p^k q^{m-k} + \sum_{k=1}^m \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} p^k q^{m-k} \\ &= m(m-1) \sum_{k=2}^m \frac{(m-2)!}{(k-2)!(m-k)!} p^k q^{m-k} + m \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} p^k q^{m-k} \\ &= p^2 m(m-1) \sum_{k=2}^m \binom{m-2}{k-2} p^{k-2} q^{m-k} + p m \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} p^{k-1} q^{m-k} \\ &= p^2 m(m-1) \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-2}{k} p^k q^{m-(k+2)} + p m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} p^k q^{m-(k+1)} \end{aligned}$$

$$= p^2 m(m-1) (p+q)^{m-2} + pm(p+q)^{m-1} = p^2 m(m-1) + pm \quad (6)$$

Nota: Si $p=q=\frac{1}{2}$ ($p+q=1$) $\Rightarrow \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{2^m} k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 m(m-1) + \left(\frac{1}{2}\right)m$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{m-1}{2} + 1 \right) = \frac{m}{2} \left(\frac{m+1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^m k^2 \binom{m}{k} = 2^{m-2} m(m+1) \quad \square$$

Calcular

(a) $\sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{k}}{k+1}$ (b) $\sum_{k=0}^m \binom{r}{k} (-1)^k$ con $0 \leq m < r$
(Control 2, 2001)

(c) $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2$ (d) $\sum_{k=0}^m (k+1) \binom{m}{k}^2$

(e) $\sum_{k=p}^m \binom{m-p}{k-p} \binom{m}{k}$ con $0 \leq p \leq m$

Solución:

a) $\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!}$

$$= \left[\sum_{k=0}^m \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!} \right] \cdot \frac{1}{m+1} = \left[\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} \right] \frac{1}{m+1}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} - \binom{m+1}{0} \right] \frac{1}{m+1} = \frac{2^{m+1} - 1}{m+1} \quad \square$$

b) $\sum_{k=0}^m \binom{r}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^m \left[\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} \right] (-1)^k = \sum_{k=0}^m \left[\binom{r-1}{k} (-1)^k + \binom{r-1}{k-1} (-1)^k \right]$

$$= \sum_{k=0}^m \left[\binom{r-1}{k} (-1)^k - \binom{r-1}{k-1} (-1)^{k-1} \right] = \binom{r-1}{m} (-1)^m - \binom{r-1}{-1} (-1)^{-1}$$

$$= \binom{r-1}{m} (-1)^m \quad \square$$

Nota: $\binom{m}{m} = 0$ si $m \geq 0$ y $m < 0$ (o $m > m$)

de tal manera que $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$ sea válido $\forall m \geq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$

(c), (d) y (e) Probaremos primero que

$$\sum_{k=p}^m \binom{m-p}{k-p} \binom{m}{k} = \binom{m}{p}$$

Consideremos el coef. de x^m en el producto $(1+x)^{m-p} (1+x)^m$

$$\left[\binom{m-p}{0} x^0 + \binom{m-p}{1} x^1 + \dots + \binom{m-p}{m-p} x^{m-p} \right] \left[\binom{m}{0} x^0 + \binom{m}{1} x^1 + \dots + \binom{m}{p} x^p + \dots + \binom{m}{m} x^m \right]$$

que vale $\binom{m-p}{m-p} \binom{m}{p} + \binom{m-p}{m-p-1} \binom{m}{p+1} + \dots + \binom{m-p}{0} \binom{m}{m}$

$$= \sum_{k=p}^m \binom{m-p}{m-k} \binom{m}{k} = \sum_{k=p}^m \binom{m-p}{m-p-(m-k)} \binom{m}{k}$$

Pues $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$ $\rightarrow$ $= \sum_{k=p}^m \binom{m-p}{k-p} \binom{m}{k}$

Por otro lado $(1+x)^{m-p} (1+x)^m = (1+x)^{2m-p}$ donde el coeficiente de x^m vale $\binom{2m-p}{m}$ pues $(1+x)^{2m-p} = \sum_{k=0}^{2m-p} \binom{2m-p}{k} x^k$

Finalmente $\sum_{k=p}^m \binom{m-p}{k-p} \binom{m}{k} = \binom{2m-p}{m}$ (TENEMOS (e))

Como casos particulares tenemos:

Para $p=0$: $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$ (TENEMOS (c))

y para $p=1$ $\sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} \binom{m}{k} = \binom{2m-1}{m}$ El término con $k=0$ vale 0. Por (c)

Ahora : $\sum_{k=0}^m (k+1) \binom{m}{k}^2 = \sum_{k=0}^m k \binom{m}{k}^2 + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 = \sum_{k=1}^m k \binom{m}{k} \binom{m}{k} + \binom{2m}{m}$

$$= \sum_{k=1}^m k \frac{m!}{k!(m-k)!} \binom{m}{k} + \binom{2m}{m} = \sum_{k=1}^m \frac{m(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \binom{m}{k} + \binom{2m}{m}$$

$$= m \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} \binom{m}{k} + \binom{2m}{m} = m \binom{2m-1}{m} + \binom{2m}{m}$$

$$\frac{(2m)!}{m!m!} = \frac{2m(2m-1)!}{m(m-1)!m!} = 2 \binom{2m-1}{m}$$

$$= (m+2) \binom{2m-1}{m}$$

P8) Calcule el valor de las siguientes sumatorias telescópicas.

(i) $\sum_{k=1}^m \frac{k 2^k}{(k+2)!}$ (ii) $\sum_{k=1}^m \frac{(k+2)}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{2^k}$

(iii) $\sum_{k=1}^m \frac{2k}{k^4 + k^2 + 1}$ (iv) $\sum_{k=1}^m \cos[(2k-1)x]$ con $x \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

(v) $\sum_{k=1}^m (k^2 + 1) k!$ (vi) $\sum_{k=1}^m \text{sen}(k\alpha)$

solución:

$$\sum_{k=1}^m \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^m \frac{[(k+2)-2]2^k}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^m \left[\frac{2^k}{(k+1)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \right]$$

$$= \frac{2^1}{2!} - \frac{2^{m+1}}{(m+2)!} = 1 - \frac{2^{m+1}}{(m+2)!} \quad \square$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{(k+2)}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{2(k+1)-k}{k(k+1)} \right) \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \cdot \frac{1}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2^{k-1}k} - \frac{1}{2^k(k+1)} \right) = 1 - \frac{1}{2^m(m+1)} \quad \square$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{2k}{k^4+k^2+1} = \sum_{k=1}^m \frac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{(k^2+1)^2-k^2} \rightarrow (k^2+k+1)(k^2-k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1} \right] \quad \text{pues } k^2-k+1 = (k-1)^2+(k-1)+1$$

$$= \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{(k-1)^2+(k-1)+1} - \frac{1}{k^2+k+1} \right] = 1 - \frac{1}{m^2+m+1} \quad \square$$

$$\sum_{k=1}^m \cos[(2k-1)x] = \sum_{k=1}^m \frac{2 \operatorname{DEN}(x) \cos[(2k-1)x]}{2 \operatorname{DEN}(x)}$$

$$= \sum_{k=1}^m \left[\frac{\operatorname{DEN}(2kx)}{2 \operatorname{DEN}(x)} - \frac{\operatorname{DEN}(2(k-1)x)}{2 \operatorname{DEN}(x)} \right]$$

$$= \frac{\operatorname{DEN}(2mx)}{2 \operatorname{DEN}(x)} \quad \square$$

$$\operatorname{DEN}(\alpha+\beta) - \operatorname{DEN}(\alpha-\beta) = 2 \operatorname{DEN} \beta \cos \alpha$$

$$\sum_{k=1}^m (k^2+1)k! = \sum_{k=1}^m [k(k+1) - (k-1)]k!$$

$$= \sum_{k=1}^m [k(k+1)! - (k-1)k!] = m(m+1)! \quad \square$$

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{DEN}(k\alpha) = \sum_{k=1}^m \frac{2 \operatorname{DEN}(k\alpha) \operatorname{DEN}(\frac{\alpha}{2})}{2 \operatorname{DEN}(\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \sum_{k=1}^m \left[\frac{\cos(\alpha(k-\frac{1}{2}))}{2 \operatorname{DEN}(\frac{\alpha}{2})} - \frac{\cos(\alpha(k+\frac{1}{2}))}{2 \operatorname{DEN}(\frac{\alpha}{2})} \right]$$

$$\cos(\alpha((k-1)+\frac{1}{2})) = \frac{\cos(\frac{\alpha}{2}) - \cos(\alpha(m+\frac{1}{2}))}{2 \operatorname{DEN}(\frac{\alpha}{2})} \quad \square$$

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2 \operatorname{DEN} \alpha \operatorname{DEN} \beta$$

P9 Probar que $\forall m \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2^t} \mid t=0,1,\dots,m \text{ y } k \in \mathbb{Z} \right\}$ ⑨

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\text{DEN}(2^i x)} = \text{ctg}(x) - \text{ctg}(2^m x) \quad (\text{Olimpiada Mundial})$$

Solución: Notemos que:

$$\begin{aligned} \text{ctg}(2^{i-1}x) - \text{ctg}(2^i x) &= \frac{\cos(2^{i-1}x)}{\text{DEN}(2^{i-1}x)} - \frac{\cos(2^i x)}{\text{DEN}(2^i x)} \\ &= \frac{\text{DEN}(2^i x) \cos(2^{i-1}x) - \cos(2^i x) \text{DEN}(2^{i-1}x)}{\text{DEN}(2^{i-1}x) \text{DEN}(2^i x)} \\ &= \frac{\text{DEN}(2^i x - 2^{i-1}x) (*)}{\text{DEN}(2^{i-1}x) \text{DEN}(2^i x)} = \frac{1}{\text{DEN}(2^i x)} \end{aligned}$$

Pues $\text{DEN}(\alpha - \beta) = \text{DEN} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{DEN} \beta$

$$(*) \quad 2^i x - 2^{i-1} x = 2^{i-1} x (2-1) = 2^{i-1} x$$

$$\text{Así} \quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{\text{DEN}(2^i x)} = \sum_{i=1}^m [\text{ctg}(2^{i-1}x) - \text{ctg}(2^i x)] = \text{ctg}(x) - \text{ctg}(2^m x) \quad \square$$

P10 Pruebe que $\sum_{k=0}^{88^\circ} \frac{1}{\cos(k) \cos(k+1)} = \frac{\cos 1^\circ}{\text{DEN}^2(1^\circ)}$
(Olimpiada Matemática Estadounidense)

Solución:

$$\frac{\text{DEN}(\alpha - \beta)}{\cos \beta \cos \alpha} = \frac{\text{DEN} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{DEN} \beta}{\cos \beta \cos \alpha} = \text{tg} \alpha - \text{tg} \beta$$

$$\begin{aligned} \text{Luego:} \quad \sum_{k=0}^{88} \frac{1}{\cos(k) \cos(k+1)} &= \frac{1}{\text{DEN}(1^\circ)} \sum_{k=0}^{88} \frac{\text{DEN}(1^\circ)}{\cos(k) \cos(k+1)} \\ &= \frac{1}{\text{DEN}(1^\circ)} \sum_{k=0}^{88} \frac{\text{DEN}((k+1) - k)}{\cos(k) \cos(k+1)} = \frac{1}{\text{DEN}(1^\circ)} \sum_{k=0}^{88} [\text{tg}(k+1) - \text{tg}(k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\text{DEN}(1)} [\text{tg} 89 - \text{tg} 0] = \frac{1}{\text{DEN}(1)} \cdot \frac{\text{DEN}(89)}{\cos(89)} \quad \text{Pues } \text{DEN}(\alpha) = \cos(90 - \alpha) \\ &= \frac{1}{\text{DEN}(1)} \frac{\cos(1)}{\text{DEN}(1)} \frac{\cos(1)}{\text{DEN}^2(1)} \quad \square \end{aligned}$$

P11 i) Pruebe que $\sum_{k=1}^m (2k-1) = m^2$

ii) Calcule

$$A = \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1) \quad (\text{Control 2, 1998})$$

Solución:

i) PRIMERA FORMA: $\sum_{k=1}^m (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^m 1 = 2 \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) - m$ (10)
 $= m^2 + m - m = m^2$

SEGUNDA FORMA: $\sum_{k=1}^m (2k-1) = \sum_{k=1}^m [k^2 - (k-1)^2] = m^2 - 0^2 = m^2$ ▢
 (MAS CREATIVA)

ii) $A = \sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1) - \sum_{i=1}^{\frac{m(m-1)}{2}} (2i-1) = \left[\frac{m(m+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{m(m-1)}{2} \right]^2$
 $= \left(\frac{m}{2} \right)^2 \left[(m^2 + 2m + 1) - (m^2 - 2m + 1) \right]$
 $= m^3$ ▢

12] (i) DEAN $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \neq y$. Pruebe sin usar inducción que para todo $m \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} x^{m-i-1} y^i = \frac{x^m - y^m}{x - y} \quad (\text{Control 2, 1999})$$

(ii) Demuestre por inducción que para $m \geq 1$

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (\text{Control 2, 1999})$$

(iii) Pruebe que $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, se tiene que

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \quad (\text{Control 2, 2001})$$

Solución:

(i) $\sum_{i=0}^{m-1} x^{m-i-1} y^i = \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1} \left(\frac{y}{x} \right)^i = x^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{y}{x} \right)^i$
 $= x^{m-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{y}{x} \right)^m}{1 - \frac{y}{x}} \cdot \frac{1 \cdot x}{1 \cdot x}$
 $= \frac{x^m \left(1 - \left(\frac{y}{x} \right)^m \right)}{x - y} = \frac{x^m - y^m}{x - y}$ ▢

(ii) Para $m=1$ $\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ y $\sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
 $= \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2}$
 $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} //$

Supongamos ahora que la afirmación se cumple para algún $m \geq 1$, o sea que $\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ y probaremos que se cumple para $m+1$, o sea:

$$\sum_{k=m+2}^{2(m+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2(m+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

En efecto: $\sum_{k=m+2}^{2(m+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=m+2}^{2m+2} \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} \right)$ (1)

Por hipótesis

Aquí
maque dos
terminos

Por este lado
agrega un
termino

Resto
lo
agregado

Coloco
lo que
quite

$$= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2m+1} + \left(\frac{1}{2m+2} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1-2}{2m+2} = -\frac{1}{2m+2}$$

Pues $2m+2$ es par
y $2m+3$ es impar

$$= \sum_{k=1}^{2m+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2(m+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \square$$

(iii) Notamos que para $m=3$, $\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{27-6+2}{18} = \frac{23}{18} = \frac{46}{36}$
y $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{36+9+4}{36} = \frac{49}{36}$ y se cumple la desigualdad.

Supongamos válido para algún m que $\frac{3}{2} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2}$
y probemos que $\frac{3}{2} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2}$ (la proposición) para $m+1$

Efectivamente:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} = \left[\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \right] + \frac{1}{(m+1)^2} > \frac{3}{2} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}$$

Por
hipótesis
de inducción.

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$$

$$= \frac{m^2 - m(m+1) + (m+1)}{m^2(m+1)}$$

$$= \frac{1}{m^2(m+1)} > 0$$

$$> \frac{3}{2} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} \quad \square$$

P13/ (i) Pruebe por inducción

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{i}} \geq 2(\sqrt{m+1} - 1) \quad (\text{control 2} \quad 3)$$

(ii) Se define la función $\varphi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ co.

$\varphi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Y para cada natural $m \geq 2$ se define por recurrencia la función $\varphi_m: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi_m(x_0, x_1, \dots, x_m) = \varphi_{m-1}(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) + \varphi_{m-1}(x_1, \dots, x_m)$$

en cada $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$

Probar usando inducción que: (12)
 $\varphi_m(x_0, \dots, x_m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x_k$ (Control 2, 1998)

Solución:

i) Vemos que para $n=1$:

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 \quad \text{que } 2(\sqrt{2}-1) < 2\left(\frac{3}{2}-1\right)$$

Luego se cumple la igualdad (Incluso en forma estricta) $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 //$

Supongamos que la afirmación es cierta para algún m ,
 o sea $\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{i}} \geq 2(\sqrt{m+1}-1)$ y probemos que es cierta

para $m+1$, o sea: $\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq 2(\sqrt{m+2}-1)$

En efecto: $\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{i}} \right] + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \geq 2(\sqrt{m+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{m+1}}$

$$= 2(\sqrt{m+2}-1) + \underbrace{2\sqrt{m+1} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} - 2\sqrt{m+2}}_{\text{Hipótesis}}$$

$$= \frac{2(m+1) + 1 - 2\sqrt{(m+1)(m+2)}}{\sqrt{m+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{(2m+3)^2} - \sqrt{4(m^2+3m+2)}}{\sqrt{m+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{4m^2+12m+9} - \sqrt{4m^2+12m+8}}{\sqrt{m+1}} > 0$$

$$> 2(\sqrt{m+2}-1) \quad \left[\text{Notar que se puede probar que } \forall m \geq 1 \right]$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{m+1}-1) \quad \text{Estricta}$$

(ii) Para $m=1$ $\varphi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$

$$\text{y } \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x_k = \binom{1}{0} x_0 + \binom{1}{1} x_1 = x_0 + x_1$$

por lo que la igualdad es cierta.

Supongamos que la afirmación es cierta para algún $m \in \mathbb{N}$

o sea que $\varphi_m(x_0, x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x_k$ para cualesquiera $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ (cualquier secuencia de $(m+1)$ términos).

Probemos entonces la afirmación para $m+1$.

$$\varphi_{m+1}(x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = \varphi_m(x_0, \dots, x_m) + \varphi_m(x_1, \dots, x_{m+1})$$

$$\stackrel{\text{por la recurrencia}}{=} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x_k + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x_{k+1} \quad \text{Por hipótesis}$$

Notemos que la hipótesis la podríamos usar pues tanto $x_0, x_1, \dots, x_m$ como $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ tienen $(m+1)$ términos y de las dos aplicando φ_m .

siguiendo...

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1}(x_0, \dots, x_{m+1}) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x_k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x_k \quad \text{corrimiento de índice} \\ &= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} x_k + \underbrace{\binom{m}{0} x_0}_{x_0} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} x_k + \underbrace{\binom{m}{m} x_m}_{x_m} \\ &= \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] x_k + x_0 + x_m \\ &= \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} x_k + \binom{m+1}{0} x_0 + \binom{m+1}{m+1} x_{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x_k \quad \square \end{aligned}$$

P14] (a) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural fijo. Probar por inducción que $(\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

$$\frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+m-1)!}{(m-1)!} = \frac{1}{p+1} \frac{(p+m)!}{(m-1)!}$$

Usar la propiedad anterior para deducir las fórmulas para calcular $\sum_{k=1}^m k$ y $\sum_{k=1}^m k^2$. (Control 2, 1998)

(b) Sean $m, r \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq m < r$. Pruebe que $\sum_{k=0}^m \binom{r}{k} (-1)^k = (-1)^m \binom{r-1}{m}$ "usando" inducción. (Control 2, 2001)

Solución:

(a) Para $m=1$ $\frac{p!}{0!} = \frac{1}{p+1} \frac{(p+1)!}{(0)!}$ La igualdad es clara

Suponiendo válida la afirmación para algún m , probemos la para $m+1$

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \dots + \frac{(p+m-1)!}{(m-1)!} + \frac{(p+m)!}{m!} \\ = \frac{1}{p+1} \frac{(p+m)!}{(m-1)!} + \frac{(p+m)!}{m!} = \frac{m(p+m)! + (p+1)(p+m)!}{(p+1)m!} \\ = \frac{(p+m)! (p+m+1)}{(p+1)m!} \end{aligned}$$

Por hipótesis

(Deducir $\sum_{k=1}^m k$ y $\sum_{k=1}^m k^2$ queda propuesto.)

$$= \frac{1}{p+1} \cdot \frac{(p+(m+1))!}{((m+1)-1)!} \quad \square$$

Aquí vamos a decidir el parámetro sobre el cual hacer la inducción (m ó r) y el elegido es: "m"
 vamos para m=0

$$\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k = \binom{r}{0} (-1)^0 = 1 \text{ con } 0 < r$$

y $(-1)^0 \binom{r-1}{0} = 1$ ∴ la igualdad se cumple.

Supongamos que la afirmación es cierta para algún m,
 sea que $\forall r > m$ $\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k = (-1)^m \binom{r-1}{m}$

Probemos entonces lo mismo para m+1, o sea que
 $\forall r > m+1$ $\sum_{k=0}^{m+1} \binom{r}{k} (-1)^k = (-1)^{m+1} \binom{r-1}{m+1}$

efecto

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{r}{k} (-1)^k = \left[\sum_{k=0}^m \binom{r}{k} (-1)^k \right] + \binom{r}{m+1} (-1)^{m+1}$$

$(-1)^m \binom{r-1}{m}$ pues como $r > m+1$,
 en particular $\underline{r > m}$

$$= (-1)^{m+1} \left[\underbrace{\binom{r}{m+1} - \binom{r-1}{m}}_{\binom{r-1}{m+1} + \binom{r-1}{m}} \right] = (-1)^{m+1} \binom{r-1}{m+1} \quad \square$$

5] Sea $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una progresión aritmética

(i) Si $a_i = x$, $a_j = y$, $a_k = z$ para $i, j, k \in \mathbb{N}$. Pruebe que $(j-k)x + (k-i)y + (i-j)z = 0$

(ii) Pruebe que $\frac{1}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{m-1}} + \sqrt{a_m}} = \frac{m}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_m}}$

solución:

i) $a_i = x = a_0 + i\delta$
 $a_j = y = a_0 + j\delta$
 $a_k = z = a_0 + k\delta$

$$\Rightarrow (j-k)x + (k-i)y + (i-j)z$$

$$= i(z-y) + j(x-z) + k(y-x)$$

$$= i(k-j)\delta + j(i-k)\delta + k(j-i)\delta$$

$$= \delta [ik - ij + ij - jk + kj - ki] = 0.$$

ii) $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}}}{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}})(\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}})} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}}}{a_i - a_{i+1}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}}}{-d}$

La diferencia constante entre dos términos consecutivos $-md$

$$= -\frac{1}{d} \sum_{i=0}^{m-1} (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}})$$

$$= -\frac{1}{d} (\sqrt{a_0} - \sqrt{a_m}) \frac{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_m}}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_m}} = -\frac{1}{d} \frac{(a_0 - a_m)}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_m}} = \frac{m}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_m}} \quad \square$$

P16] Sean k, p, m naturales tales que $0 \leq k \leq p \leq m$ (15)
 Pruebe las siguientes igualdades:

$$(a) \binom{m}{k} \binom{m-k}{p-k} = \binom{m}{p} \binom{p}{k}$$

$$(b) \binom{m}{0} \binom{m}{p} + \binom{m}{1} \binom{m-1}{p-1} + \dots + \binom{m}{p} \binom{m-p}{0} = 2^p \binom{m}{p}$$

Solución:

$$(a) \binom{m}{k} \binom{m-k}{p-k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{(m-k)!}{(p-k)!(m-p)!}$$

$$= \frac{m!}{(m-p)! p!} \cdot \frac{p!}{k!(p-k)!} \quad \text{Los factores aparecen}$$

$$= \binom{m}{p} \binom{p}{k}$$

$$(b) \binom{m}{0} \binom{m-0}{p-0} + \binom{m}{1} \binom{m-1}{p-1} + \dots + \binom{m}{p} \binom{m-p}{p-p}$$

$$\stackrel{\text{por (a)}}{=} \binom{m}{p} \binom{p}{0} + \binom{m}{p} \binom{p}{1} + \dots + \binom{m}{p} \binom{p}{p} = \binom{m}{p} \underbrace{\left[\binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \dots + \binom{p}{p} \right]}_{2^p} \quad \square$$

P17] Los números reales $a_0, a_1, \dots$ satisfacen $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$
 y sea $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ definida por

$$b_m = \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \quad (\text{Olimpiada Mundial})$$

Pruebe que $b_m \in [0, 2)$

Solución:

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} = \left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \geq 0 \quad \text{pues } a_k \geq 1 > 0$$

$$\text{y } a_k \geq a_{k-1}$$

Luego $b_m \geq 0$ (Pues es suma de términos ≥ 0)

$$\text{Ahora: } b_m = \sum_{k=1}^m \frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}} \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \sum_{k=1}^m \frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^m \left(\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}} + \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)$$

$$\text{y } \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}} + \frac{a_{k-1}}{a_k} \leq 2 \quad \text{pues } a_{k-1} \leq a_k \quad \left(\begin{array}{l} \text{Luego } \frac{a_{k-1}}{a_k} < 1 \\ \text{y } \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}} < 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow b_m \leq 2 \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_m}} \right) < 2$$

$$\therefore b_m \in [0, 2) \quad \square$$

8/ (i) Pruebe sin usar inducción que para cada natural $m \geq 1$

(16)

$$\sum_{k=2}^{m+1} \binom{k}{2} = \binom{m+2}{3} \quad (\text{control 2, 1995})$$

(ii) Usando sumas conocidas encuentre la fórmula de:
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (m-1)m$

y demuéstrelo por inducción.

(iii) Pruebe que $\sum_{k=0}^m (1+x)^k = \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} x^k$

Solución:

$$i) \sum_{k=2}^{m+1} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^m \binom{k+1}{2} = \sum_{k=1}^m \frac{(k+1)!}{(k-1)! 2!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k(k+1)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^m k^2 + \sum_{k=1}^m k \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) \left[\frac{2m+1}{3} + 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) \frac{2(m+2)}{3}$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} = \frac{(m+2)!}{(m-1)! 3!} = \binom{m+2}{3} \quad \square$$

$$ii) \sum_{i=1}^{m-1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{m-1} i^2 + \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} + \frac{(m-1)m}{2}$$

$$= \frac{m(m-1)}{2} \left[\frac{2m-1}{3} + 1 \right]$$

$$= \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{2(m+1)}{3}$$

$$= \frac{m(m^2-1)}{3} = \frac{m^3-m}{3}$$

Probémoslo por inducción:

Para $m=2$ $1 \cdot 2 = \frac{2^3-2}{3} \quad \checkmark$

Supongamos la fórmula válida para algún m y probémosla para $m+1$

Vemos que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (m-1)m + m(m+1)$

$$= \frac{m^3-m}{3} + m(m+1)$$

$$= \frac{m^3+3m^2+3m-m}{3} = \frac{(m+1)^3-1-m}{3}$$

$$= \frac{(m+1)^3-(m+1)}{3} \quad \square$$

$$iii) \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} x^k = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} x^{k+1} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k - \binom{m+1}{0} x^0 \right] = \frac{(1+x)^{m+1} - 1}{x} = \frac{1 - (1+x)^{m+1}}{1 - (1+x)} = \sum_{k=0}^m (1+x)^k \quad \square$$

P19 (i) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 Calcule $\sum_{k=0}^m (a+bk)q^k$ (Suma Hipergeométrica) (17)

(ii) Calcule $\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots$ donde $|q| < 1$
 (Puede darse que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+bx}{c^x} = 0$ si $|c| > 1$) (*)

Solución:

$$\begin{aligned} (i) \sum_{k=0}^m (a+bk)q^k &= \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^m (a+bk)q^k (1-q) \\ &= \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^m (a+bk)(q^k - q^{k+1}) = \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^m \left[\underbrace{(a+bk)q^k - (a+b(k+1))q^{k+1}}_{\text{Telescópica}} + \underbrace{bq^{k+1}}_{\text{Geométrica}} \right] \\ &= \frac{1}{1-q} \left[a - (a+b(m+1))q^{m+1} + bq \left(\frac{1-q^{m+1}}{1-q} \right) \right] \end{aligned}$$

(ii) Ahora si $m \rightarrow \infty$ (en la fórmula anterior), como $|q| < 1$ tenemos $(a+b(m+1))q^{m+1} = \frac{(a+b(m+1))}{\left(\frac{1}{q}\right)^{m+1}} \rightarrow 0$

y $q^{m+1} \rightarrow 0$ (Pues $|q| < 1$)

Por (*) pues $|q| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{q}\right| > 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (a+bk)q^k = \frac{1}{1-q} \left[a + \frac{bq}{1-q} \right]$$

En particular si $a=0$ y $b=1$, $\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$ $\square$

P20 Pruebe que $\forall m \in \mathbb{N}$, $S = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i^3 + 3i^2 + 2i} < \frac{1}{4}$
 (Olimpiada Nacional)

Solución:
 Notemos que $i^3 + 3i^2 + 2i = i(i^2 + 3i + 2) = i(i+1)(i+2)$

$$\begin{aligned} \text{Luego } S &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{(i+2) - i}{i(i+1)(i+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} \right] \\ &< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \square \end{aligned}$$

1) Dado $D_m = \sum_{k=0}^m q^k$ y $S_m = \sum_{k=0}^m \left(\frac{1+q}{2}\right)^k$ (18)

Pruebe que $\sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i+1} D_i = 2^m S_m$ ($q \neq 1$)
(OLIMPIADA MATEMÁTICA DE HUNGRÍA)

SOLUCIÓN: TENEMOS QUE:

$$D_m = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \text{ y } S_m = \frac{1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{m+1}}{1-\left(\frac{1+q}{2}\right)} = 2 \frac{1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{m+1}}{1-q}$$

Entonces:

$$\sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i+1} D_i = \frac{1}{1-q} \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i+1} (1-q^{i+1})$$

$$= \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i} (1-q^i)$$

$$= \frac{1}{1-q} \left[\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} (1-q^i) - \binom{m+1}{0} (1-q^0) \right]$$

$$= \frac{1}{1-q} \left[\underbrace{\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i}}_{2^{m+1}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} q^i}_{(1+q)^{m+1}} \right]$$

$$= \frac{2^{m+1}}{1-q} \left[1 - \left(\frac{1+q}{2}\right)^{m+1} \right] = 2^m S_m \quad \square$$

2) Evalúe la suma $S = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \frac{k^2+k+1}{k!}$ (OLIMPIADA MATEMÁTICA CANADIENSE)

SOLUCIÓN:

SEPARAMOS ENTRE PARES e IMPARES.

$$= \sum_{i=1}^m \cancel{(-1)^{2i}} \frac{(2i)^2 + (2i) + 1}{(2i)!} + \sum_{i=1}^m \cancel{(-1)^{2i-1}} \frac{(2i-1)^2 + (2i-1) + 1}{(2i-1)!}$$

$$= \cancel{\sum_{i=1}^m \frac{(2i)^2}{(2i)!}} + \sum_{i=1}^m \frac{2i+1}{(2i)!} - \sum_{i=1}^m \frac{(2i-1)^2}{(2i-1)!} - \sum_{i=1}^m \cancel{\frac{2i}{(2i-1)!}}$$

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{2i+1}{(2i)!} - \frac{2(i-1)+1}{(2(i-1))!} \right] = \frac{2m+1}{(2m)!} - 1 \quad \square$$

3) Dada $f(x) = \frac{g^x}{g^x + 3}$. Evalúe la suma $S = \sum_{k=1}^{2002} f\left(\frac{k}{2003}\right)$ (OLIMPIADA MATEMÁTICA CANADIENSE)

SOLUCIÓN: Sean p, q tal que $p+q=1$

Entonces $f(p) + f(q) = \frac{g^p}{g^p + 3} + \frac{g^q}{g^q + 3} \quad \begin{matrix} 1 \cdot g^p \\ 1 \cdot g^p \end{matrix}$

$$= \frac{9^p}{9^p+3} + \frac{9^{p+1}}{9^{p+1}+3 \cdot 9^p} = \frac{9^p}{9^p+3} + \frac{9}{9+3 \cdot 9^p}$$

$$= \frac{9^p}{9^p+3} + \frac{3}{9^p+3} = \frac{9^p+3}{9^p+3} = 1.$$

(19)

Así:

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2002}{2003}\right) &= 1 \\ f\left(\frac{2}{2003}\right) + f\left(\frac{2001}{2003}\right) &= 1 \\ &\vdots \\ f\left(\frac{1001}{2003}\right) + f\left(\frac{1002}{2003}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} 1001 \text{ parejas.}$$

$$\Rightarrow S = 1001$$

P24 (i) Pruebe que $\forall m \in \mathbb{R}$

$$\lfloor m \rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \quad \text{donde } \lfloor x \rfloor \text{ es el entero más grande menor o igual a } x.$$

(ii) Calcule $\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{\alpha+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ donde $\alpha \in \mathbb{Z}^+$
(Olimpiada Mundial)

Solución:

(i). Consideremos los 2 casos posibles ($m \in \mathbb{Z}$)

(a) $\lfloor m \rfloor = 2m \Rightarrow m = 2m + \varepsilon \quad \varepsilon \in [0, 1)$

(b) $\lfloor m \rfloor = 2m+1 \Rightarrow m = 2m+1 + \varepsilon$

(a) $\Rightarrow \frac{m}{2} = m + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \frac{m+1}{2} = m + \frac{\varepsilon+1}{2} \quad \left(\frac{\varepsilon}{2} \in [0, \frac{1}{2}) \quad \text{y} \quad \frac{1+\varepsilon}{2} \in [0, 1) \right)$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = m \quad \text{y} \quad \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = m$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = 2m = \lfloor m \rfloor //$$

(b) $\Rightarrow \frac{m}{2} = m + \frac{1+\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \frac{m+1}{2} = m+1 + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = m \quad \text{y} \quad \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = m+1$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = 2m+1 = \lfloor m \rfloor$$

(ii) Por (i), tomando $m = \frac{\alpha}{2^k}$ tenemos

$$\left\lfloor \frac{\alpha}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\alpha+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\alpha+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{\alpha+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{\alpha}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{k+1}} \right\rfloor = \underbrace{\left\lfloor \alpha \right\rfloor}_{\alpha} - \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{m+1}} \right\rfloor = \alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{m+1}} \right\rfloor$$

(Pues $\alpha \in \mathbb{Z}$)

y si $m \rightarrow \infty$, $\frac{\alpha}{2^{m+1}} < 1$ para $m \geq m_0$ (m_0 suficientemente grande) (20)

y caso $0 < \frac{\alpha}{2^{m+1}} \Rightarrow (\forall m \geq m_0) \frac{\alpha}{2^m} \in (0, 1)$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{\alpha}{2^m} \right\rfloor = 0 \quad \forall m \geq m_0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{\alpha + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{2^m} \right\rfloor \right) = \alpha \quad \square$$

P25 (a) Pruebe que $(\forall m \geq 1) (\forall j \geq 0)$

$$\sum_{i=1}^m \binom{i+j-1}{j} = \binom{m+j}{j+1} \quad \begin{array}{l} \text{(Ude inducción} \\ \text{sobre } m) \\ \text{(Control 1, 1992)} \end{array}$$

(b) Concluya que para $k \geq 2$

$$\sum_{m_2=1}^{m_1} \sum_{m_3=1}^{m_2} \dots \sum_{m_{k-1}=1}^{m_{k-2}} \dots \sum_{m_k=1}^{m_{k-1}} 1 = \binom{m_1+k-2}{k-1} \quad \text{(Control 1, 1992)}$$

Solución:

(a) Para $m=1$, $\sum_{i=1}^1 \binom{i+j-1}{j} = \binom{j}{j} = 1$

y $\binom{m+j}{j+1} = \binom{1+j}{j+1} = 1$ y por lo tanto la igualdad se cumple.

Supongamos cierta la igualdad para algún m y $\forall j \geq 0$ (con ese m) y probemos lo mismo para $m+1$.

En efecto $\sum_{i=1}^{m+1} \binom{i+j-1}{j} = \left[\sum_{i=1}^m \binom{i+j-1}{j} \right] + \binom{(m+1)+j-1}{j}$

Por hipótesis $= \binom{m+j}{j+1} + \binom{m+j}{j} = \binom{m+j+1}{j+1} = \binom{(m+1)+j}{j+1} \quad \square$

(b) Tenemos que (a) se cumple para $j=0, 1, 2, \dots$ o sea

$$\sum_{i=1}^m \binom{i-1}{0} = \binom{m}{1}, \quad \sum_{i=1}^m \binom{i}{1} = \binom{m+1}{2}, \quad \sum_{i=1}^m \binom{i+1}{2} = \binom{m+2}{3} \dots$$

Así: $\sum_{m_2=1}^{m_1} \sum_{m_3=1}^{m_2} \dots \sum_{m_{k-2}=1}^{m_{k-3}} \sum_{m_{k-1}=1}^{m_{k-2}} \sum_{m_k=1}^{m_{k-1}} \binom{m_{k-1}}{0}$ Forma creativa
Escribir el

$\binom{m_{k-1}}{1}$ Por (1)

$\binom{m_{k-2}+1}{2}$

$\binom{m_{k-3}+2}{3}$

$\binom{m_{k-(k-1)}+(k-2)}{k-1} = \binom{m_1+k-2}{k-1} \quad \square$

(21)

P26) Sea (b_m) una sucesión de términos positivos definida por la recurrencia

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}} + 2(1 - \sqrt{1 + \sqrt{b_{k-1}}}) \quad \forall k \geq 1.$$

$$b_0 = 1.$$

Calcule el valor de $\sum_{k=1}^m b_k 2^k$. (Olimpiada Mundial de Matemáticas)

Solución:

Definamos $a_k = 1 + \sqrt{b_k}$ con $a_0 = 1 + \sqrt{b_0} = 2$

Notamos además que:

$$b_k = (\sqrt{1 + \sqrt{b_{k-1}}} - 1)^2 \quad \text{de la recurrencia}$$

$$\sqrt{b_k} = \sqrt{1 + \sqrt{b_{k-1}}} - 1 = \sqrt{1 + \sqrt{b_{k-1}}} - 1$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{b_k} = \sqrt{1 + \sqrt{b_{k-1}}} \Rightarrow a_k = \sqrt{a_{k-1}} = (a_{k-1})^{1/2}$$

$$a_0 = 2 \Rightarrow a_1 = a_0^{1/2} = 2^{1/2} \Rightarrow a_2 = (2^{1/2})^{1/2} = 2^{1/4} \Rightarrow a_3 = 2^{1/8}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow a_m = 2^{1/2^m} = 2^{2^{-m}}$$

$$\text{Finalmente } \sum_{k=1}^m b_k 2^k = \sum_{k=1}^m (a_k - 1)^2 2^k = \sum_{k=1}^m (a_k^2 - 2a_k + 1) 2^k$$

$$= \sum_{k=1}^m [(a_{k-1} 2^k - a_k 2^{k+1}) + 2^k] = a_0 2^1 - a_m 2^{m+1} + \sum_{k=1}^m 2^k$$

$$= 4 - 2^{2^{-m}} 2^{m+1} + (2^{m+1} - 2) = 2 + 2^{m+1}(1 - 2^{2^{-m}})$$

Para poder tener la guía lista el lunes (para que ustedes le saquen copia del martes en adelante "transnoche" el día Domingo y ahora estoy muy cansado, pero a la vez muy satisfecho por el buen trabajo realizado por y para ustedes. Les cuento que además pronto saldrá la guía de relaciones, con mas inducción y algo de cardinalidad. Finalmente debo decir que esta guía va dedicada a una persona muy especial para mí, gracias a esa jovencita volví a recuperar la alegría de vivir y ahora doy una persona nueva, feliz y con mas ganas que nunca de seguir con mi decisión... gracias Magdalena por hacerme reír y por alejarme de mis tristezas, por brindarme una linda amistad... Gracias por escucharme, gracias por confiar en mí y "gracias" por "hacerme sentir importante". Ahora me va pasando, pero me da pena porque ahora todo 1er Año sabe la grandiosa persona que tu eres...

Con mucho cariño
David.

V/A

P15 Pruebe por inducción que $(\forall m \geq 1) m \in \mathbb{N}$ se cumple que: $\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^m (m-i+1) a_i$

Concluir que si $H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$, entonces $\sum_{i=1}^m H_k = (m+1)H_m - m$
 (Control Recursivo)

Solución:

Hechos inductivos sobre m .

Para $m=1$, $\sum_{k=1}^1 \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^1 a_i = a_1$ y $\sum_{i=1}^1 (1-i+1) a_i = a_1 //$

Supongamos la afirmación válida para algún m y probemos la afirmación para $m+1$, o sea:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(m+1-i+1) a_i}{m+2-i} \quad \text{pues } \sum_{k=1}^{m+1} b_k = \left(\sum_{k=1}^m b_k \right) + b_{m+1}$$

En efecto, $\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^k a_i = \left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^k a_i \right) + \sum_{i=1}^{m+1} a_i$

$$= \sum_{i=1}^m (m-i+1) a_i + \sum_{i=1}^{m+1} a_i$$

o sea $\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m+1} (m-i+1) a_i \right) - \underbrace{(m-(m+1)+1) a_{m+1}}_{=0} + \sum_{i=1}^{m+1} a_i$

como y pues $k \leq m$ en la inducción con $P=m+1$ en la inducción.

$$= \sum_{i=1}^{m+1} \left[(m-i+1)a_i + a_i \right] = \sum_{i=1}^{m+1} (m+2-i) //$$

(16)

Γουίλκνσ $a_i = \frac{1}{i}$, τότε έχουμε:

$$\sum_{h=1}^m \underbrace{\sum_{i=1}^h \frac{1}{i}}_{H_h} = \sum_{i=1}^m (m-i+1) \cdot \frac{1}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^m \left[(m+1) \cdot \frac{1}{i} - 1 \right]$$

$$= (m+1) \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^m 1$$

$$= (m+1)H_m - m.$$