

P4 (i) Probar por inducción que para $m \geq 1$
 $2 \cdot 7^m + 3 \cdot 5^m - 5$

Es divisible por 24 (control 2, 1999)

(ii) Sea a un entero impar
 Probar que $\forall m \geq 1, 2^{m+2} \mid a^{2^m} - 1$. (2^{m+2} divide a $a^{2^m} - 1$)

Solución:

(i) Para $m=1$ $2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 5^1 - 5 = 24$ que es divisible por 24 ✓
 Si suponemos para algún $m \in \mathbb{N}$ que $2 \cdot 7^m + 3 \cdot 5^m - 5$ es
 divisible por 24, o sea $2 \cdot 7^m + 3 \cdot 5^m - 5 = 24k$ ($k \in \mathbb{Z}$),
 probaremos que $2 \cdot 7^{m+1} + 3 \cdot 5^{m+1} - 5$ también es divisible por
 24.

$$\text{En efecto: } 2 \cdot 7^{m+1} + 3 \cdot 5^{m+1} - 5 = 2 \cdot 7 \cdot 7^m + 3 \cdot 5 \cdot 5^m - 5$$

$$= 14 \cdot 7^m + 15 \cdot 5^m - 5$$

$$= 12 \cdot 7^m + 12 \cdot 5^m + 2 \cdot 7^m + 3 \cdot 5^m - 5$$

$$= 12(7^m + 5^m) + 24k \quad \leftarrow \text{Hipótesis de Inducción.}$$

divisible
por 2 (es suma
de dos impares)

divisible
por 24

divisible por 24

divisible por 24



(ii) Para $m=1$ $8 \mid a^2 - 1$ para a impar $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Pero } a \text{ impar} \Rightarrow a = 2k+1 \Rightarrow a^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k$$

O sea $a^2 - 1 = 4k(k+1)$, pero $k(k+1)$ es divisible por 2 pues k ó $(k+1)$ es par. Luego $a^2 - 1 = 4 \underbrace{k(k+1)}_{\substack{\text{divisible por 2} \\ \text{divisible por 8}}}$ (10)

Asumamos para algún m que:

$$2^{m+2} \mid a^{2^m} - 1 \text{ y probemos que } 2^{(m+1)+2} \mid a^{2^{m+1}} - 1$$

O sea que $a^{2^{m+1}} - 1$ es divisible por 2^{m+3} .

En efecto:

$$a^{2^{m+1}} - 1 = (a^{2^m} - 1)(a^{2^m} + 1)$$

$\xrightarrow{\text{Hipótesis}} \underbrace{\text{div. por } 2^{m+2}}_{\substack{\text{pues } a^{2^m} \\ \text{y } 1 \text{ son pares}}} \cdot \underbrace{\text{div. por } 2}_{\substack{\text{pues } a^{2^m} \\ \text{y } 1 \text{ son pares}}} (a \text{ es impar})$
 divisible por $2^{m+2} \cdot 2 = 2^{m+3}$ ▢

P8 Sean α, β las raíces o soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$

Probar que $(\forall m \in \mathbb{N}) \alpha^m + \beta^m \in \mathbb{N}$. (Control 1, 1989)

• Soluciones

Para $m=0$, $\alpha^0 + \beta^0 = 2 \in \mathbb{N}$

Para $m=1$, $\alpha^1 + \beta^1 = \alpha + \beta = 2 \in \mathbb{N}$

Notas: $\alpha + \beta = 2$

$\alpha\beta = -4$

Recordar propiedades de las Ecs. de 2º grado.

Supongamoslo válido para algún $k=0, 1, 2, \dots, m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 1$. Probemos entonces la afirmación para $m+1$

Notemos que $\frac{(\alpha + \beta)(\alpha^m + \beta^m)}{2} = \frac{\alpha^{m+1} + \alpha\beta^m + \beta\alpha^m + \beta^{m+1}}{2} = \frac{(\alpha^{m+1} + \beta^{m+1}) + \alpha\beta(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1})}{2}$

$$\Rightarrow \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} = 2 \underbrace{(\alpha^m + \beta^m)}_{\in \mathbb{N}} + 4 \underbrace{(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1})}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$$

Por hipótesis. ▢

Pienso por que necesito probar la afirmación para $m=0$ y $m=1$ y no solo para $m=0$ como siempre...

P9 Sea $u_m = (3 + \sqrt{5})^m + (3 - \sqrt{5})^m$ para $m=0, 1, 2, \dots$

(a) Probar que $u_{m+1} = 6u_m - 4u_{m-1}$

(b) Probar que $(\forall m \geq 0) u_m$ es un entero positivo.

(c) Probar que $(\forall m \geq 0) 2^m \mid u_m$

Probar que $2^m \mid \lceil (3 + \sqrt{5})^m \rceil$

Notas $\lceil x \rceil$ es el menor entero p tal que $x \leq p$
 Ejemplo $\lceil 2.5 \rceil = 3$ $\lceil -0.5 \rceil = 0$ $\lceil -3 \rceil = -3$

Solución:

$$(a) 6u_m - 4u_{m-1} = 6(3+\sqrt{5})^m + 6(3-\sqrt{5})^m - 4(3+\sqrt{5})^{m-1} - 4(3-\sqrt{5})^{m-1}$$

$$= (3+\sqrt{5})^{m-1} \left[\underbrace{6(3+\sqrt{5}) - 4}_{14+6\sqrt{5}} \right] + (3-\sqrt{5})^{m-1} \left[\underbrace{6(3-\sqrt{5}) - 4}_{14-6\sqrt{5}} \right]$$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})^{m-1} (14+6\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})^{m-1} (14-6\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})^2}$$

(Control) $z = (3+\sqrt{5})^{m+1} + (3-\sqrt{5})^{m+1} = u_{m+1}$

(b) Que $u_m > 0$ es claro pues $3+\sqrt{5} > 0$ y $3-\sqrt{5} > 0$
 $\Rightarrow u_m = (3+\sqrt{5})^m + (3-\sqrt{5})^m > 0$

Luego basta probar que es entero.

Para $m=0$, $u_0 = (3+\sqrt{5})^0 + (3-\sqrt{5})^0 = 1+1 = 2$ Entero

Para $m=1$, $u_1 = (3+\sqrt{5})^1 + (3-\sqrt{5})^1 = 6$ Entero.

Hipótesis de Inducción: $(\forall k \leq m) u_k$ es entero.

Pdq u_{m+1} es entero. En efecto

$$u_{m+1} = \underbrace{6u_m}_{\text{Enteros}} - \underbrace{4u_{m-1}}_{\text{Enteros}} \rightarrow \text{Entero} // \blacksquare$$

Reflexionar por que nuevamente debo probarlo para $m=0$ y $m=1$.

(c) Para $m=0$, $2^0 | u_0$ pues $1 | 2$ ✓

Para $m=1$, $2^1 | u_1$ pues $2 | 6$ ✓

Hipótesis de Inducción: $(\forall k \leq m) 2^k | u_k$

Pdq $2^{m+1} | u_{m+1}$. En efecto $u_{m+1} = \underbrace{6u_m}_{\text{divisible por } 2^m} - \underbrace{4u_{m-1}}_{\text{divisible por } 2^{m-1}}$

Para algunos $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 2^m l_1 - 2^2 \cdot 2^{m-1} l_2$$

$$= 2^{m+1} (3l_1 - l_2)$$

divisible por 2^{m+1} //

Notemos que $0 < 3-\sqrt{5} < 1 \Rightarrow 0 < (3-\sqrt{5})^m < 1$
 y $u_m = (3+\sqrt{5})^m + \underbrace{(3-\sqrt{5})^m}_{\in (0,1)}$ es entero (Por (b))

Luego $u_m = \lceil (3+\sqrt{5})^m \rceil$ (Porque?)

y por (c) $2^m | u_m = \lceil (3+\sqrt{5})^m \rceil$ $\blacksquare$

PROBLEMA (f.m) m.c.m. LA FRECUENCIA DEFINIDA POR:

$$f_0 = 1, f_1 = 2 \text{ y } f_{m+2} = 2f_{m+1} + f_m \quad \forall m \geq 0$$

Probar por inducción que:

$$(\forall m \geq 0) \quad \frac{f_{m+1}}{f_m} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

donde el "2" aparece (m+1) veces.

(Control Recuperativo)

12
 $f_1 = 2$ y el "2" aparece $(0+1)$ veces //

Supongamos la afirmación válida para algún m y probemosla para $m+1$. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{f_{(m+1)+1}}{f_{m+1}} &= \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} = \frac{2f_{m+1} + f_m}{f_{m+1}} = 2 + \frac{f_m}{f_{m+1}} = 2 + \frac{1}{\frac{f_{m+1}}{f_m}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}} \end{aligned}$$

Por hipótesis.

P11] Se define $a_m = 2^{2^m} + 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Se probará que $\text{m.c.d.}(a_m, a_n) = 1$ si $m \neq n$

Para probarlo hagamos lo siguiente:

(a) Muestre por inducción que:

$$(a_0 a_1 a_2 \dots a_{m-1}) + 2 = a_m \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

(b) Pruebe que si $\exists p > 1$ tal que $p | a_m$ y $p | a_n$ para $m \neq n$, entonces p es par e impar a la vez. Concluya el resultado, es decir $\text{m.c.d.}(a_m, a_n) = 1$ para $m \neq n$.

máximo común divisor.

(Portno 2, 1993)

Solución:

(a) Para $m=1$, $a_0 + 2 = (2^{2^0} + 1) + 2 = 5 = 2^{2^1} + 1 = a_1$

Supongamos la afirmación válida para algún m , o sea

$$a_0 a_1 \dots a_{m-1} + 2 = a_m$$

y probemosla para $m+1$, es decir

$$a_0 a_1 \dots a_{m-1} a_m + 2 = a_{m+1}$$

En efecto: $\frac{a_0 a_1 \dots a_{m-1} a_m + 2}{a_m - 2} = \frac{(a_m - 2) a_m + 2}{a_m - 2} = (2^{2^m} - 1)(2^{2^m} + 1) + 2$

$$= (2^{2^m})^2 - 1 + 2$$

$$= 2^{2^m \cdot 2} + 1$$

$$= 2^{2^{m+1}} + 1 = a_{m+1} \quad \square$$

(b) Supongamos $m > n$ (para evitar de generalidad)

Entonces $a_0 a_1 \dots a_m \dots a_{m-1} + 2 = a_m$ (Por (a))

Si $p | a_m \Rightarrow p | a_0 \dots a_m \dots a_{m-1}$ y como $p | a_m$

$\Rightarrow p | a_m - (a_0 \dots a_m \dots a_{m-1}) = 2 \Rightarrow p | 2$ y $p > 1 \Rightarrow p = 2$

Luego p es par. Pero $p | a_m - 2^{2^m} + 1$ o sea p divide a un número impar $\Rightarrow p$ impar. Luego p es par e impar a la vez y esto es una contradicción. Luego $p = 1$, o sea el mayor divisor común que tienen a_m y a_m (con $m \neq m$) es 1. (Si alguien los divide a ambos, debe ser el 1.). En otras palabras:
 $\text{m.c.d.}(a_m, a_m) = 1. \quad \square$

P14 Para $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, define $k = 2^m$. Queremos probar que (16)
 todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ de $2k-1$ elementos posee un
 subconjunto $X \subseteq Y$ de k elementos cuya suma es
 divisible por k .

(i) Para $m=1$ y $k=2$ pruebe que de todo subconjunto de
 3 elementos de $\mathbb{N}$ se pueden extraer 2 números cuya suma
 es divisible por 2.

(ii) Probar la propiedad para m cualquiera.
 (Control 1, 1991)

Solución:

(i) En un subconjunto de $\mathbb{N}$ con 3 elementos existen 2 que
 deben tener la misma paridad. Luego la suma de estos 2
 elementos es par y por ende divisible por 2. $\square$

(ii) En (i) probamos la proposición para $m=1$
 asumamos cierta la proposición para algún $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, c
 sea dado un cto de $2k-1$ elementos se puede extraer un
 subconjunto de k elementos con suma divisible por k . ($k=2^m$)

Pdga: Dado un cto con $2\tilde{k}-1$ elementos puedo elegir $\tilde{k}$ de
 ellos tal que su suma sea divisible por $\tilde{k}$ ($\tilde{k}=2^{m+1}$)

Replantando el problema con $\tilde{k} = 2k$ $= 2 \cdot 2^m$
 $= 2k$

tenemos:

Dado un cto de $4k-1$ elementos puedo elegir

$2k$ de ellos tal que su suma sea divisible por $2k$.

Notamos que $4k-1 = (2k-1) + (2k-1) + 1$.

Luego el cto de $4k-1$ elementos se puede repartir como
 sigue:

$$\underbrace{\dots\dots\dots}_{4k-1 \text{ elementos}} = \underbrace{\dots\dots\dots}_{2k-1} \quad \underbrace{\dots\dots\dots}_{2k-1} \quad \underbrace{\dots}_{1 \text{ elemento.}}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Elijo } k \text{ cuya} \\ \text{suma } S_1 \text{ es} \\ \text{divisible por } k \end{array} \right. \end{array} \right\} G_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Elijo } k \text{ cuya} \\ \text{suma } S_2 \text{ es} \\ \text{divisible por } k \end{array} \right.$$

En el grupo 1 sobran $k-1$ elementos (después de elegir k de ellos).

En el grupo 2 sobran $k-1$ elementos

En el grupo 3 tenemos 1 elemento

tenemos $\swarrow (2k-1) \leftarrow$ Tenemos un grupo sobra de
 de $2k-1$ elementos

$G_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Elijo } k \text{ cuya} \\ \text{suma } S_3 \text{ es divisible} \\ \text{por } k \end{array} \right.$

$\rightarrow$ en el cto de $4k-1$ elementos.

Notar que los elementos usados para elegir los k elementos de
 G_1 , G_2 y G_3 son distintos. (Don sacados de grupos distintos)

Suma de los elementos de $G_i = S_i = k\alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$

(17)

$$\begin{aligned} S_1, S_2 \text{ y } S_3 & \text{ son divisibles por } k \\ S_1 &= k\alpha_1 \quad \alpha_1 \in \mathbb{Z} \\ S_2 &= k\alpha_2 \quad \alpha_2 \in \mathbb{Z} \\ S_3 &= k\alpha_3 \quad \alpha_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Notamos que entre α_1, α_2 y α_3 existen (por lo menos) dos con la misma paridad. Sean estos α_i y α_j $i, j \in \{1, 2, 3\}$ $i \neq j$

Luego si unimos G_i con G_j obtenemos un grupo de $2k$ elementos cuya suma de elementos es igual a $k\alpha_i + k\alpha_j$

$G_i \cup G_j$ es el grupo de $2k$ elementos buscado (O sea, aquel en que la suma de sus elementos sea divisible por $2k$)

pues α_i y α_j tienen la misma paridad.

$$\frac{k(\alpha_i + \alpha_j)}{\text{div. por } 2} \text{ div. por } 2k$$

$G_i \cap G_j = \emptyset$ (Porque?)

Por esto que $G_i \cup G_j$ tiene $2k$ elementos y no menos.

18] En este problema de demostración por inducción que en un tablero de ajedrez de $2^m \times 2^m$ casilleros, con $m \geq 2$, a lo más se pueden colocar 2^{2m-1} caballos sin que se coman. Suponga que la propiedad se cumple para $m=2$, es decir que en un tablero de $2^2 \times 2^2 = 16$ casilleros se pueden colocar a lo más $2^{2 \cdot 2 - 1} = 8$ caballos sin que se coman. (No lo demuestre)

(i) Demuestre que si la propiedad es cierta para $m=2$ también lo es para $m=3$. Para esto razone por contradicción dividiendo el tablero de $2^3 \times 2^3$ casilleros en 4 tableros iguales y pruebe que si se pueden colocar más de $2^{2 \cdot 3 - 1} = 32$ caballos en el tablero completo, entonces uno de los 4 tableros pequeños quedaría con más de 8 caballos.

(ii) Demuestre que si la propiedad es válida para m cualquiera con $m \geq 2$, también lo es para $m+1$. (Control 2, 1994)

Deducción $2^3 = 8$

$$(i) \quad 2^3 = 8 \quad \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & c_1 \\ \hline 4 & c_2 \\ \hline \end{array} \right\}$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son la cantidad de caballos que hay en cada cuadrado de $2^2 \times 2^2$. Supongamos que hay más de 32 caballos en total, o sea

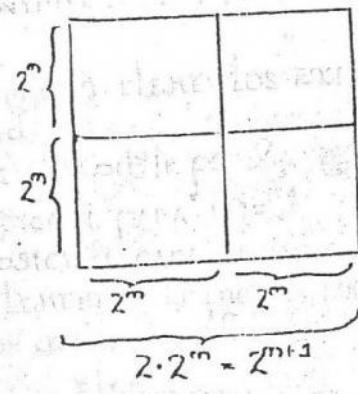
$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 > 32$$

$$\text{Si } c_1 \leq 8, c_2 \leq 8, c_3 \leq 8 \text{ y } c_4 \leq 8$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \leq 32 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Luego alguno de ellos (C_1, C_2, C_3 o C_4) es mayor estricto que B , por ende en uno de los cuadrados de 2×2^2 hay mas de 8 caballos que no decoran, lo cual es una contradicción a lo que el problema dice que armamos. $\square$

(ii) Pda en un tablero de lado $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$ se pueden colocar a lo mas $2^{2(m+1)-1} = 2^{2m+1} = 2^2 \cdot 2^{2m-1} = 4 \cdot 2^{2m-1}$



Analogamente a lo hecho en (i), se pueden colocar mas de $2^{2(m+1)-1} = 4 \cdot 2^{2m-1}$ por lo menos en 1 de los cuadrados mas pequeños tendremos mas de $\frac{1}{4} (2^{2(m+1)-1})$ caballos sin que decoran, $\frac{1}{4} (4 \cdot 2^{2m-1})$ lo cual contradice que la propiedad era válida para m . $\square$

EN EL OTRO.

P20 Probar que para todo natural $m \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+k} \leq \frac{5}{6}. \quad (\text{Control 1, 1996})$$

Solución:

Para $m=1$ la proposición es cierta pues

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6} //$$

Supongamos que para algún $m \geq 1$, $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+k} \leq \frac{5}{6}$.

Probamos la desigualdad para $m+1$.

$$\sum_{k=1}^{(m+1)+1} \frac{1}{(m+1)+k} = \sum_{k=2}^{m+3} \frac{1}{(m+1)+(k-1)} = \sum_{k=2}^{m+3} \frac{1}{m+k}$$

COMPENSA
DE INDICE

$$= \sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+(m+2)} + \frac{1}{m+(m+3)}$$

Como y
resto
EL TÉRMINO
CON $k=1$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+k} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2m+3}$$

$$= \frac{-2+1}{2(m+1)} + \frac{1}{2m+3}$$

$$= \frac{-1}{2(m+1)} + \frac{1}{2m+3}$$

$$= \frac{-(2m+3) + 2(m+1)}{2(m+1)(2m+3)}$$

Hipótesis
de inducción

$$\leq \frac{5}{6} + \frac{-1}{2(m+1)(2m+3)} \leq \frac{5}{6} \quad \square$$

P22] Dada $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ con $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ tal que $f(m+1) > f(f(m))$. Probar que $f(m) = m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$
(Olimpiada Mundial, 1977)

Solución:

Probamos primero que $f(1) < f(2) < f(3) < \dots$ y para ello probaremos la afirmación S_m , $\forall m \in \mathbb{N}^*$ que dice:

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n).$$

Definimos $A_i = \{f(i), f(i+1), f(i+2), \dots\}$ conjunto acotado inferiormente por 1, (pues sus elementos pertenecen a $\mathbb{N}^*$) por lo que tiene un menor elemento (recordar que sus elementos son "enteros" positivos) $\downarrow$

$\hookrightarrow$ es mínimo e ínfimo.

Probamos S_1 : DP $1 < m \Rightarrow f(m) > f(f(m-1)) = f(1)$
con $1 = f(m-1) \geq 1 \in \mathbb{N}^*$ pues $m > 1$

Luego $f(m)$ es el menor elemento de $A_1 = \{f(1), f(2), \dots\}$

Luego su menor elemento es $f(1) \Rightarrow f(1) < f(m) \quad (\forall m > 1)$
que existe por lo anteriormente explicado. Luego S_1 es cierta.

Supongamos ciertas $S_1, S_2, \dots, S_m$ y probemos S_{m+1}

Notemos que $S_1 \Rightarrow f(1) < f(2)$

$S_2 \Rightarrow f(2) < f(3)$

$\vdots$

$S_m \Rightarrow f(m) < f(m+1)$

Pruébelo por inducción

Luego $f(m) > f(m-1) > \dots > f(1) \geq 1 \therefore f(m) \geq m$
(Por qué?)

Pd q: S_{m+1} cierto, o sea $m > m+1 \Rightarrow f(m) > f(m+1)$.

Pero $m > m+1 \Rightarrow m-1 > m \Rightarrow f(m-1) > f(m) \leftarrow$ Por S_m

Luego $f(m-1) > f(m) \geq m \Rightarrow f(m-1) > m \Rightarrow f(m-1) \geq m+1$ (*) (24)

Por lo tanto si $m > m+1$, entonces

$$f(m) > f(f(m-1)) = f(m) \text{ con } m = f(m-1) \geq m+1$$

Por ende $f(m)$ no puede ser el menor elemento de $A_{m+1} = \{f(m+1), f(m+2), f(m+3), \dots\}$ $\uparrow$ por (*)

Luego no queda otra que el menor elemento de A_{m+1} sea $f(m+1) \Rightarrow f(m+1) < f(m) \forall m > m+1$.

Luego S_{m+1} es cierta.

Así probamos que $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq \dots$ o sea que

$$m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$$

Si para algún m , $f(m) \geq m+1 \Rightarrow f(f(m)) \geq f(m+1)$
pero $f(m+1) > f(f(m))$
($\rightarrow \leftarrow$)

Luego $(\forall m \in \mathbb{N}^*) f(m) \leq m$

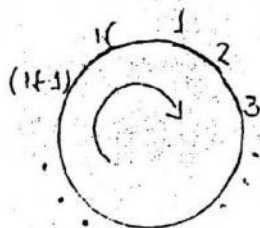
pero como $f(m) > f(m-1) > f(m-2) > \dots > f(1) \geq 1$

$$\Rightarrow f(m) \geq m \text{ (Por qué?)}$$

Luego $f(m) = m (\forall m \in \mathbb{N}^*)$ $\square$

P23 Inicialmente se disponen N personas numeradas de 1 a N como se indica en la figura. Las personas se retiran del círculo sucesivamente una por medio (i.e. una sí, otra no, una sí, ...) en el sentido de los punteros del reloj, comenzando con la numerada "2" y hasta que solo queda 1 persona. Pruebe por inducción que cuando $N = 2^m$, para algún $m \in \mathbb{N}$, la persona que queda al final es aquella cuya numeración inicial es 1. Explícite bien su hipótesis inductiva.

(Control 2, 2001)

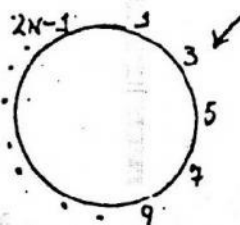
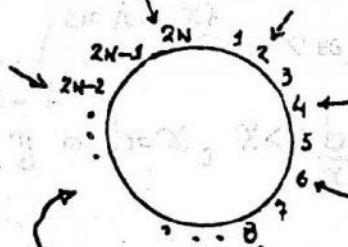


Solución: Para $m=0$, $N=2^0=1$ persona (Ni siquiera se alcanza a jugar)

Para $m=1$, $N=2^1=2$ personas, de las cuales se elimina a la segunda, y queda la primera.

Hipótesis: Si en un grupo de $N=2^m$ personas de juego de inducción eliminando la segunda de ellas, entonces solo va a quedar la primera.

Problemos la afirmación para $m+1$, o sea si tengo $N = 2^{m+1} = 2 \cdot 2^m = 2N$ personas y jugamos eliminando primero la segunda de ellas, entonces resta la primera de ellas la que queda al final. Si parto con 2, seguine con 4, 6, ..., $2N$ y luego daría una nueva vuelta partiendo de 3 (eliminando 3)



Parto con 3

Las personas en estos números.

Observamos que fueron eliminados los números pares del conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2N\}$ y quedó la mitad de los números (los impares), o sea quedaron N personas y partimos por la segunda de estas (el 3) entonces la que sobrevive es la primera de ellas, o sea el 1 (la persona con el N° 1)

Desafío: Calcule $\sum_{k=0}^m \frac{2^k}{a^{2^k} + 1}$

Hint: Buena fuente, y recuerde las telescópicas.

Si no les vale de lo pueden preguntar a los alumnos de la sección 05.

Primero quiero dedicar esta guía a todos los ex-alumnos del Instituto Nacional, a la gran familia Institutaria que por siempre seguirá unida. Ahora un mensaje para todos(as): No le tengan miedo a caerle, no teman del fracaso, pues es del fracaso del cual uno aprende (en el éxito uno no cuestiona nada). De hecho las personas que mas triunfan son aquellas que mas veces se han caído, pero la diferencia esta en que esas personas luchan hasta el final y nunca bajan los brazos ante una mala batalla pues saben que con su "perseverancia" la guerra esta ganada de antemano. Ahora un mensaje para las personas con penas de amor: ¡a dejes de congeir, no requiera cuando estes triste, porque nunca sabes quien se puede enamorar de tu congeira.

Por último un cariñoso saludo a M.V., a G.J. y a María Belén por enseñarme a congeir cuando estoy triste. Mucha suerte en el control, disfruten sus vacaciones, pasenla muy bien e "invitenme" (JEJE)
DAVID MALLA-05