

MA1101-3 Introducción al Álgebra.**Profesor:** Pablo Dartnell R.**Auxiliar:** Felipe Atenas M.

Resumen Control 4

A continuación se presenta un resumen de los contenidos del control 4 del curso Introducción al Álgebra. Ojo que es un resumen, por lo que puede no contener todo lo necesario para el control, pero sí lo esencial. Mi consejo es que ustedes mismos elaboren su propio resumen, porque son ustedes mismos los que saben qué cosas manejan bien y las que no manejan tan bien.

Sumatorias

1. Suma notable:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Progresión aritmética: la regla para el término k -ésimo es $a_k = A + kd$, donde $A, d \in \mathbb{R}$ (notar que $A = a_0$). Es decir, para dos términos consecutivos tenemos: $a_{k+1} = a_k + d$.
3. Progresión geométrica: la regla para el término k -ésimo es $a_k = Ar^k$, donde $A, r \in \mathbb{R}$ (notar que $A = a_0$). Es decir, para dos términos consecutivos tenemos: $a_{k+1} = r \cdot a_k$. En cuanto a la suma, tenemos:

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Notemos dos cosas acá: la primera, es que $r \neq 1$ y la segunda, que **esta suma parte desde $k = 0$** .

4. Suma notable:

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Suma notable:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Binomio de Newton

1. Factorial: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$, con $n \in \mathbb{N}$

2. Coeficiente binomial: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

3. Propiedades:

- $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Si $k < n$: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

4. Teorema (Binomio de Newton): Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Notar acá que la suma parte desde $k = 0$, el límite superior de la suma corresponda al exponente del binomio (que a priori es fijo), y la suma de los exponentes al lado derecho es $k + n - k = n$.

5. Sumas dobles: corresponde a una suma que depende de dos índices. Es del tipo

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{k,j} = \sum_{k=0}^n (a_{k,0} + a_{k,1} + \dots + a_{k,m}) = \text{etc...}$$

Observar que los límites inferior y superior de $\sum_{j=0}^m a_{k,j}$ pueden depender del índice k .

6. Intercambio de sumas: cuando los límites superiores e inferiores de ambas sumatorias no dependen de los índices, entonces:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{k,j} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{k,j}$$

Notar que esto es, básicamente, reordenar términos y sumar en otro orden, pero al final el resultado es el mismo (solo cuando los límites de una sumatoria no dependen del índice de la otra).

7. Ejemplo importante: cuando el término general es un producto, donde cada término depende solo de un índice: $a_{kj} = c_k \cdot d_j$. En este caso:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m c_k d_j = \left(\sum_{k=0}^n c_k \right) \left(\sum_{j=0}^m d_j \right)$$

8. Suma múltiple: siguiendo con el mismo espíritu de las sumas dobles, tenemos las sumas múltiples, que son del tipo (consideremos $p \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{k_0=0}^{n_0} \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_p=0}^{n_p} a_{k_0, k_1, \dots, k_p}$$

9. Intercambio de sumas: al igual que en las sumas dobles, si los límites inferiores y superiores no dependen de los otros índices, entonces se puede intercambiar el orden en la suma (cualquier reordenamiento).

Cardinalidad

1. Igual Cardinal: Sean A, B dos conjuntos no vacíos. Diremos que A y B tienen el mismo cardinal si **existe** una función **biyectiva** $f : A \rightarrow B$. Esto lo denotamos como: $|A| = |B|$.

También denotamos $|A| \leq |B|$ cuando exista una función inyectiva $f : A \rightarrow B$.

2. Propiedades:

- $|A| \leq |A|$
- Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.
- Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$.
- $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|$.

3. Conjuntos numerables: diremos que un conjunto es numerable cuando tiene la misma cardinalidad de $\mathbb{N}$. Recordar que $\mathbb{N}$ es infinito.

4. Son numerables: $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$.

5. Propiedad: Sea A un conjunto infinito cualquiera. Entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Si además se tiene que $|A| \leq |\mathbb{N}|$ (para verificar esto, por ejemplo, podría verse que A es subconjunto de un conjunto numerable), entonces (como A es infinito) $|\mathbb{N}| = |A|$.

6. Propiedad: Sean A y B conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. En general, el producto (cartesiano) finito de conjuntos numerables, es un conjunto numerable.

7. Propiedad: Sea $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ una colección numerable de conjuntos, donde cada A_k es numerable. Entonces la unión $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ es también numerable (en otras palabras, la unión numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable).

8. Prop: Sea A un conjunto infinito, y sea $x \in A$. Se tiene entonces que $|A| = |A \setminus \{x\}|$.

Métodos comunes para tener en cuenta en problemas de cardinalidad

Se debe tener claro que estos métodos **NO SON LOS ÚNICOS** para demostrar que dos conjuntos tienen el mismo cardinal. De hecho, en el apunte aparecen otras formas para demostrar esto, así que cuidado. Esto es como lo estándar, pero no significa que sea lo único que deben tener en cuenta.

1. Por definición: encontrar una función biyectiva entre los conjuntos. Si se pide demostrar que un conjunto X es numerable, puede ser útil buscar una biyección entre X y $\mathbb{N}$ (o al revés) o entre X y otro conjunto que se sabe que es numerable (o al revés). O bien, puede ser útil usar un conjunto que se sabe que tiene la misma cardinalidad que X , que usar X directamente.
2. Usar la propiedad 5 de la lista de cardinalidad: Demostrar que el conjunto en cuestión es infinito ($|X| \geq |\mathbb{N}|$) y, además, que es subconjunto de un conjunto numerable ($X \subseteq \text{cjo. numerable} \Rightarrow |X| \leq |\mathbb{N}|$).
3. Otra forma de usar la propiedad 5: Primero se demuestra que el conjunto en cuestión es infinito ($|X| \geq |\mathbb{N}|$) y luego demostrar el segundo punto por definición, es decir, que existe una función inyectiva, que parte del conjunto en cuestión y que llega a $\mathbb{N}$ o a otro conjunto numerable (esto último implica que $|X| \leq |\mathbb{N}|$).
4. Usar la propiedad 7 de la lista de cardinalidad: como la unión numerable de conjuntos numerables, es un conjunto numerable, podría ser útil utilizar esto cuando existen variables que se mueven en conjuntos numerables (por ejemplo, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$). Más concretamente, si consideramos el conjunto $H = \{a^b \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Q}\}$, notamos que la variable b se mueve en $\mathbb{Q}$, por lo que podríamos definir $H_b = \{a^b \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ y luego escribimos $H = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} H_b$, por lo que escribimos H como una unión numerable. Para ver que H es numerable, bastaría verificar que cada H_b es numerable.

Cualquier comentario o consulta a felipe.e.atenas@gmail.com Éxito en el estudio!
--