

Auxiliar 10

No numerabilidad ft estructuras algebraicas

RESUMEN SEMANA 10

Proposiciones (Producto numerable). *El producto (cartesiano) numerable de conjuntos finitos **NO** es numerable.*

Definición (L.C.I). *Dado un conjunto no vacío llamamos **ley de composición interna** en A a la función $*$: $A \times A \rightarrow A$ tal que*

$$(x, y) \rightarrow x * y$$

*Al par $(A, *)$ lo llamamos **estructura algebraica**.*

Propiedades. *Sea $(A, *)$ una estructura algebraica. Decimos que $*$:*

- *Es **asociativa** si: $x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$.*

- *Tienen neutro si $\exists e \in A$ tal que, $\forall x \in A, x * e = e * x = x$.*

- *$x \in A$ tiene inverso si $\exists y \in A$ tal que $x * y = y * x = e$.*

- *es **conmutativa** si, $\forall x, y \in A, x * y = y * x$.*

- *Tiene un elemento **absorbente** si $\exists a \in A$ tal que $\forall x \in A, x * a = a * x = a$.*

- *Tiene un elemento **idempotente** si $\exists a \in A$ tal que $a * a = a$.*

Proposiciones (Unicidad neutro). *Toda estructura algebraica posee **solo un** neutro.*

Proposiciones (Unicidad inverso). *Para una estructura algebraica $(A, *)$ con $*$ asociativa, los inversos (en caso de existir) son únicos.*

- P1.-** a) Sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto infinito no numerable y sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos tales que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = B$. Demuestre que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que A_k es infinito no numerable.
- b) (**propuesto**) Sea A un conjunto infinito no numerable y $B \subseteq A$ un conjunto infinito numerable. Pruebe que $A \setminus B$ es infinito no numerable.
- Hint:** Razone como en la parte a).
- Obs:** Con este resultado se demuestra, por ejemplo, que el conjunto $\mathbb{I}$ de los irracionales es no numerable.

P2.- Se define en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna dada por:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

- a) Estudiar la conmutatividad de $*$.
- b) Estudiar la asociatividad de $*$.

- c) Determine el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$.
- d) Determine que elementos son invertibles para $*$, determine sus inversos y si es que son únicos.
- e) Determine los elementos idempotentes.
- f) **(Propuesto)** ¿Hay elementos absorbentes?

P3.- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica con $*$ una l.c.i asociativa en A . Sea $a \in A$ fijo. Definimos

$$B = \{x \in A \mid x * a = a * x\}$$

- a) Demuestre que $\forall x, y \in B, (x * y) \in B$.
- b) Demuestre que si para $*$ existe un neutro $e \in A$, entonces $e \in B$.
- c) Demuestre que si para $x \in B$ tiene inverso $x^{-1} \in A$ para $*$. Entonces $x^{-1} \in B$.

P4.- Sean $(A_1, *_1)$ y $(A_2, *_2)$ dos estructuras algebraicas. Definimos en $A_1 \times A_2$ la l.c.i

$$(a_1, a_2) *_f (b_1, b_2) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$$

- a) Muestre que si $*_1$ y $*_2$ son asociativas, $*_f$ también lo es.
- b) Muestre que si $*_1$ y $*_2$ son conmutativas, $*_f$ también lo es.
- c) Muestre que si $*_1$ y $*_2$ tienen neutros e_1 y e_2 , respectivamente, entonces (e_1, e_2) es neutro para $*_f$.