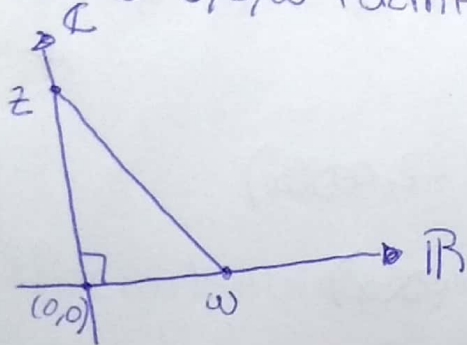


Apuntes AUXILIAR 13

P1) (a)

(i) Como $0, z, w$ forman triángulo ~~equi~~ Rectángulo en 0 , entonces:



SPG: $z = (0, a)$ con $a, b \in \mathbb{R}$
 $w = (b, 0)$

$\Rightarrow w$ no tiene parte imaginaria nula $\text{Im}(w) = 0$, luego
 $\bar{w} = w$. y $\text{IR}(z) = 0$

$\Rightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = zw + \bar{z}w$ | Se usó que $w = \bar{w}$

$= w(z + \bar{z})$ | Pero $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) = 2 \cdot 0 = 0$

$= w \cdot 0$

$= 0 \quad \parallel$

(ii) $|z - w|^2 = (z - w) \cdot (\overline{z - w})$ | Se uso propiedad $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$= (z - w) \cdot (\bar{z} - \bar{w})$ | " " " $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

$= z \cdot \bar{z} - w \bar{z} - \bar{z} \bar{w} + w \cdot \bar{w}$ | $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ y $w \cdot \bar{w} = |w|^2$

$= |z|^2 - (w \bar{z} + \bar{z} \bar{w}) + |w|^2$ | Por parte i)
 $(w \bar{z} + \bar{z} \bar{w} = 0)$

$= |z|^2 + |w|^2 \quad \parallel$

(b) PASANDO z A SU FORMA POLAR, TENEMOS QUE:

$$z = |z| \cdot e^{i\alpha}$$

PARA DETERMINAR $|z|$, USEMOS LA INFORMACION DE ENUNCIADO

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos(\alpha) \Leftrightarrow |z| (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = 2 \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow |z| \cdot 2 \cos(\alpha) = 2 \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow |z| = 1.$$

$$\Rightarrow z = e^{i\theta}$$

LUEGO, USANDO FORMULA DE MOIVRE, SE TIENE QUE:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = (e^{i\alpha})^n + (e^{-i\alpha})^n = e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}$$

$$= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) + \cos(n\alpha) + i \sin(-n\alpha)$$

$$= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) + \cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha)$$

$$= 2 \cos(n\alpha) //$$

P2)

$$(i) S + i S' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha) + i \sum_{k=0}^n \sin(k\alpha)$$

Como índice superior e inferior de ambas sumas son iguales, se pueden juntar.

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha) + i \sin(k\alpha)$$

$$| e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta}$$

USANDO MOIVRE.

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k \cdot 1^{n-k} \quad | \text{ Binomionewton.}$$

$$= (1 + e^{i\theta})^n = (1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \quad // \blacksquare$$

ii) Por la parte anterior, $\operatorname{Re}((1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) = S$ y
 $\operatorname{Im}((1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) = S'$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta) &= 1 + \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cancel{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cancel{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}_{e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ LA FORMA POLAR DE $1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ es $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
 con $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = |1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta)|$ y $\frac{\theta}{2} = \operatorname{Arg}(\sim)$

Luego, $(1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n$
 $= 2^n \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n \cdot e^{i\frac{n\theta}{2}}$

$$(1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = 2^n \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + 2^n \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n \cdot i \cdot \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}((1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) = 2^n \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) = S$$

$$\operatorname{Im}((1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) = 2^n \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) = S'$$

P3)

(a) Por contradicción, supongamos que $\exists a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} + q$

$$a + bi \text{ es divisor DE } 0 \Rightarrow \exists c, d \in \mathbb{Z} + q \quad (a, b) \cdot (c, d) = \underbrace{(0, 0)}_{\text{DE } \mathbb{Q}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ d = \frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ Si } a, b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > a \wedge a^2 + b^2 > b \Rightarrow \frac{a}{a^2 + b^2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow c \notin \mathbb{Z} *$$

$\textcircled{2}$ Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y obtenemos que:

$$a \cdot c - bd = 0 \Leftrightarrow -bd = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

$$ad + bc = 0 \Leftrightarrow bc = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$\Leftrightarrow (c, d) = (0, 0) \quad * \quad (\text{por definici3n DE que } (a, b) \text{ sea divisor DE } 0, \text{ entonces } (c, d) \neq (0, 0))$$

$\textcircled{3}$ Si $b = 0 \Rightarrow a \neq 0$ (analogo a $\textcircled{2}$)

ii) Busquemos condiciones que deben cumplir los elementos invertibles.

Sea $(c, d) \in \mathbb{C}$ invertible. Entonces $\exists (a, b) \in \mathbb{C} + i\mathbb{C}$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (1, 0) \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 & (1) \\ ad + bc = 0 & (2) \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

UNIDAD DE
los complejos

$$\textcircled{1} \text{ Si } c=0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow -bd=1 \Rightarrow d = -\frac{1}{b} \in \mathbb{Z}$$

$$ad=0 \Rightarrow a=0$$

$$\text{Pero } d, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{1}{b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow b=1 \vee b=-1$$

$$\text{Si } c=0 \Rightarrow (a, b) = (0, 1) \vee (a, b) = (0, -1) \text{ (osea, son los complejos } i \text{ o } -i)$$

$$\textcircled{2} \text{ Análogo a } \textcircled{1}, \text{ se obtiene } (a, b) = (1, 0) \vee (a, b) = (-1, 0) \text{ si } d=0.$$

(osea, los complejos 1 o -1)

$$\textcircled{3} \text{ } c, d \neq 0$$

$$\text{Entonces } a = \frac{1+bd}{c}, \text{ usando esto en } \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow d \left(\frac{1+bd}{c} \right) + bc = 0 \Rightarrow b \left(c + \frac{d^2}{c} \right) + \frac{d}{c} = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{d}{c^2+d^2} \in \mathbb{Z} \text{ pero } c^2+d^2 > d$$

$\Rightarrow d=0 \times \Rightarrow$ si $(c, d) \neq (0, 0)$ por coordenada.
($c=0 \wedge d=0$)
entonces (c, d) no es invertible

pu)

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \sum_{k=0}^n r^{2k} &= \sum_{k=0}^n (r^2)^k \stackrel{\text{geométrica}}{=} \frac{(r^2)^{n+1} - 1}{r^2 - 1} \\
 &= \frac{r^{2n+2} - 1}{r^2 - 1} \\
 &= \frac{r^{n+1} (r^{n+1} - r^{-(n+1)})}{r^2 - 1} \\
 &= \frac{r^n (r^{n+1} - r^{-n-1})}{\frac{r^2 - 1}{r}} \\
 &= \frac{r^n (r^{n+1} - r^{-n-1})}{r - r^{-1}} \quad // \square
 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \sum_{k=0}^n e^{2ki\theta} = \sum_{k=0}^n ((e^{i\theta})^2)^k \stackrel{\text{geom. (i)}}{=} \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

$$\text{Ahora, } e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta) \quad y$$

$$e^{+i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta} = 2i \sin((n+1)\theta)$$

$$\Rightarrow \sum e^{2ki\theta} = (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \frac{2i (\sin((n+1)\theta))}{2i \sin(\theta)}$$

$$\text{Luego, } \sum \cos(2k\theta) \stackrel{\text{parte real}}{=} \left(\sum e^{2ki\theta} \right) = \frac{\cos(\theta) \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \quad // \square$$