MA1101-3 Introdución al Álgebra.
Profesor: Marcos Kiwi.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 16 de agosto de 2018.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 13: Complejos

$$e^{i\pi}+1=0$$

P1 a) Sean $0, z, w \in \mathbb{C}$ tres complejos que forman un triangulo rectángulo en 0. (i.e. asuma que $z=(0,a)$ y $w=(b,0)$ con $a,b\in\mathbb{R}$.

i) Demuestre que $z\bar{w}+\bar{z}w=0$.

ii) Demuestre que $|z-w|^2=|z|^2+|w|^2$

b) Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que

$$z+\frac{1}{z}=2cos(\alpha)$$

Demuestre que $z^n+\frac{1}{z^n}=2cos(n\alpha)$.

P2 Considere los números complejos $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $w=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Encuentre el menor $n\in\mathbb{N}$ tal que $z^n=w^n=1$.

P3 Sean los números reales $S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(k\alpha)$ y $S'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}sen(k\alpha)$.

i) Demuestre que

$$S+iS'=(1+cos(\alpha)+isen(\alpha))^n$$

ii) Escriba el número $1+cos(\alpha)+isen(\alpha)$ en su forma polar y deduzca que

$$S=2^n\left(cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n\cdot cos\left(\frac{n\cdot\alpha}{2}\right)$$
$$S'=2^n\left(cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n\cdot sen\left(\frac{n\cdot\alpha}{2}\right)$$

P5 Se define el conjunto $\mathbb{Z}[i]$ como sigue

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\mid |a,b\in\mathbb{Z}\}\backslash\{0\}$$

i) Demuestre que $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$ no tiene divisores del cero ($+$ y $\cdot$ son las operaciones de suma y multiplicación de $\mathbb{C}$).

ii) Demuestre que los únicos elementos invertibles de $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$ son $1, i, -1, -i$.

P5 El objetivo de este problema es demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}cos(2k\theta)=\frac{cos(n\theta)sen((n+1)\theta)}{sen(\theta)}$$

Para ello:

i) Para $r\in\mathbb{C}$, demuestre que $\sum_{k=0}^{n}r^{2k}=\frac{r^n(r^{n+1}-r^{-n-1})}{r-r^{-1}}$

ii) Estudie la parte real e imaginaria de $\sum_{k=0}^{n}e^{2ki\theta}$

P6 (PROPUESTO)

i) Sean u,v,w complejos tales que $w=u-v$. Sea θ el ángulo entre los complejos u y v (recuerde que los números complejos se pueden ver como vectores en el plano complejo). Demuestre que $|w|^2=|u|^2+|v|^2-|u||v|cos(\theta)$.

ii) Sea $\mathbb{Z}[i]$ el conjunto definido en la **P2**. Sea $f:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z}[i]$ función tal que $f(z)=z^2$. Desmuestre que $Re(f(z))^2+Im(f(z))^2=|f(z)|^2$.

Hint: https://www.youtube.com/watch?v=QJYmyhnaaek