MA1101-3 Introdución al Álgebra.
Profesor: Marcos Kiwi.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 3 de agosto de 2018.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 11

Homomorfismos y grupos

RESUMEN SEMANA 11

Definición 1 (Homomorfismo)**.** Dadas dos estructuras algebraicas $(A,*)$ y (B,Δ), una función $f : A \to B$ **homomorfismo** de $(A,*)$ en (B,Δ) si:

$$\forall x,y \in A, f(x*y) = f(x)\Delta f(y)$$

Observación 1. Si f es biyectiva, diremos que es un **isomorfismo**. Y además, f^{-1} es isomorfismo de $B \to A$.

Proposición 1. *Si existe un* ***epimorfismo*** *f entre $(A,*)$ y (B,Δ), entonces se tiene que:*

- *Si $(A,*)$ es asociativa, (B,Δ) también lo es.*
- *Si $(A,*)$ conmuta, (B,Δ) también.*
- *Si e_A es neutro para $(A,*)$, $f(e_A)$ es neutro para (B,Δ). (**Nota:** En general, si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$)*

Definición 2. En el espacio de las funciones B^A se define la operación $*$ tq $\forall f,g \in B^A$, $f*g = f(a) *_B g(a)$ con $a \in A$ y $*_B$ la operación de la estructura $(B,*_B)$.

Definición 3. Una estructura algebraica $(G,*)$ diremos que es un **grupo** si: $*$ es **asociativa**, admite neutro en G y todo elemento de G posee inverso en G.
Diremos que es **grupo abeliano** si $*$ es conmutativa.

P1.- Demuestre que si $(G,*)$ es grupo y $A \neq \phi$, entonces $(G^A,\star)$ es grupo.
Obs: $G^A = \{f : A \to G,\ \text{f es función}\}$ y $\star$ es una ley de composición interna tal que $\forall f,g \in G^A, f\star g = f(a)*g(a), \forall a \in A$ con $*$ la l.c.i. de G.
Propuesto: Verifique además que si $(G,*)$ es grupo abeliano entonces $(G^A,\star)$ también lo es.

P2.- Sean

$$G = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$$
$$G' = \{2^a 3^b \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

Se define la suma de pares en G como:

$$(m,n) + (p,q) = (m+p, n+q)$$

a) Demuestre que $(G,+)$ es un grupo.
b) Demuestre que $(G,+)$ es isomorfo a $(G',\cdot)$, con $\cdot$ la multiplicación usual en $\mathbb{R}$.

P3.- Sea $(\mathcal{H},\star)$ un grupo y $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ f(h) = h^{-1}$. Pruebe que

$$\text{f es isomorfismo} \iff (\mathcal{H},\star) \text{ es grupo abeliano.}$$

Considere la operación $*$ definida en Z como $n*m = x+y-1$. Demuestre que $(\mathbb{Z},+)$ y $(\mathbb{Z},*)$ son isomorfos.

P4.- Sean $(G_1,*_1)$, $(G_2,*_2)$ grupos. Demuestre que $(G_1 \times G_2, \bigotimes)$ también es un grupo. Verifique que la conmutatividad también se hereda.
Obs: Recuerde que la operación $\bigotimes$ definida para $(a_1,a_2), b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ es $(a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$.

P5.- **(pa' la casa)** Sea $(G,*)$ un grupo abeliano con neutro e. Considere la función $\varphi : G\times G \to G$ definida por

$$\varphi(a,b) = (a*b)^{-1}$$

Demuestre que φ es un homomorfismo de $(G\times G,\bigotimes)$ en $(G,*)$. ¿Es isomorfismo? Justifique.

PENSANDO EN EL SÁBADO...

P1) **(P1 C5 2007)** Calcule el valor de

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}b^i$$

P2) **(P2 C4 2015)** Sea $M = \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid |A| = 2\}$. Demuestre que M es numerable.

P3) **(P2 C4 2017)** Demuestre que

$$|\{\frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{9, 10\}\}| = 2^8 + 2^9$$