

Apuntes AUXILIAR 9

$$\begin{aligned}
 \text{P1)} \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} &= \sum_{k=1}^n \frac{\cancel{k} \cdot n!}{\cancel{k}! (n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} \quad \left| \text{Usamos } n! = (n-1)! \cdot n \right. \\
 &= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} \quad \left| \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} \right. \\
 &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \quad \left| \text{Cambio DE índice } j = k-1 \right. \\
 &= n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} \cdot q^{n-(j+1)} \quad \left| \begin{array}{l} p^{j+1} = p^j \cdot p \\ q^{n-(j+1)} = q^{(n-1)-j} \end{array} \right. \\
 &= n p \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{(n-1)-j} \quad \left| \text{Usamos teorema DEL Binomio} \right. \\
 &= n p \cdot (p+q)^{n-1} \quad \left| \text{Usamos } (p+q=1) \right. \\
 &= n p \cdot 1^{n-1} \\
 &= n p \quad \text{//}
 \end{aligned}$$

P2) PDQ: $|A \cup B| = |A \cup C|$ Sabemos que...
 el CARDINAL DE $A \cup B$ es igual al DE $A \cup C$ ssi $\exists f: A \cup B \rightarrow A \cup C$ biyectiva.
 Entonces construyamos dicha biyección! $\rightarrow$ biyección = función biyectiva.
 Sabemos por enunciado que $|B| = |C| \rightarrow \exists g: B \rightarrow C$ biyectiva, con
 esto en mente, nuestra función $f: A \cup B \rightarrow A \cup C$ candidata a biyección será:
 $f: A \cup B \rightarrow A \cup C$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$
 comprobemos si esta función es biyectiva!

* Como $A \cap B = \emptyset$, entonces $f(x)$ está bien definida.

Inyectividad: Sean $x_1, x_2 \in A \cup B$.

$$\text{PDQ: Si } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$1) x_1, x_2 \in A: \text{ Como tenemos } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2) \\ \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) //$$

$$2) x_1, x_2 \in B: \text{ Si } x_1 \neq x_2, \text{ como } g(\cdot) \text{ es biyectiva} \Rightarrow \text{es inyectiva por lo tanto } g(x_1) \neq g(x_2)$$

$$3) x_1 \in A, x_2 \in B: \text{ Como } x_1 \in A \Rightarrow f(x_1) = x_1 \in A \text{ y como } x_2 \in B \Rightarrow g(x_2) \in C \\ \text{Luego como por hipótesis } A \cap C = \emptyset \Rightarrow f(x_1) \neq g(x_2) //$$

$\Rightarrow f(\cdot)$ es inyectiva.

Sobreyectividad: Sea $y \in A \cup C$.

$$\text{PDQ: } \exists \bar{x} \in A \cup B \text{ tq } f(\bar{x}) = y$$

Nuevamente, tenemos 2 casos:

$$1) y \in A: \text{ en este caso tomamos } \bar{x} = y \in A, \text{ con lo cual } f(y) = y$$

$$2) y \in C: \text{ Como } g(\cdot) \text{ es biyectiva} \Rightarrow \exists \bar{x} \in B \subseteq A \cup B \text{ tq } g(\bar{x}) = y$$

$\Rightarrow f(\cdot)$ es sobreyectiva.

Por lo tanto se concluye que $f(\cdot)$ es biyectiva, por lo tanto

$$|A \cup B| = |A \cup C| //$$

P3 Usemos el lema de Schröder-Bernstein ($|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$)

$$1) \text{ PDQ: } |\mathbb{D}| \leq |\mathbb{N}|$$

$$\text{Notemos que } \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \Rightarrow |\mathbb{D}| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}|$$

Pero como $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables, entonces $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}|$ también es numerable.

$$\Rightarrow |\mathbb{D}| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|. \therefore |\mathbb{D}| \leq |\mathbb{N}| \quad (\text{I})$$

$$2) \text{ PDQ: } |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{D}|$$

Consideremos $\tilde{\mathbb{D}} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \cdot z \in \mathbb{Z}\}$. Por cerradura de $\mathbb{Z}$ para multiplicación tenemos que $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ es infinito, entonces $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es infinito.

$\Rightarrow \tilde{\mathbb{D}}$ es infinito y $\tilde{\mathbb{D}} \subseteq \mathbb{D}$. Por lo tanto, como $\mathbb{D}$ tiene un subconjunto infinito $\Rightarrow \mathbb{D}$ es infinito, por lo que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{D}|$ ya que

$\mathbb{N}$ es el infinito con "menos elementos" (Lema 8.8 Apunte)
 $\Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{D}| \quad (\text{II})$

Juntando (I) y (II) tenemos que: $|\mathbb{D}| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{D}|$. Luego por T. Schröder-Bernstein se concluye que $|\mathbb{D}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow \mathbb{D}$ es numerable. //

P4 $A \neq \emptyset$. $\mathcal{F} := \{f: \{1, 2, 3\} \rightarrow A \mid f \text{ es función}\}$

(a) PDQ: $|\mathcal{F}| = |A \times A \times A| \Leftrightarrow \exists \psi: \mathcal{F} \rightarrow A^3$ biyectiva.

Usando el hint, consideremos la función: $\psi: \mathcal{F} \rightarrow A \times A \times A$

Si probamos que $\psi(\cdot)$ es biyectiva estamos listos. $f \mapsto \psi(f) = (f(1), f(2), f(3))$

Inyectividad: Sean $f, g \in \mathcal{F}$ t.q. $\psi(f) = \psi(g)$

$$\Rightarrow (f(1), f(2), f(3)) = (g(1), g(2), g(3))$$

Por lo tanto $\begin{cases} g(1) = f(1) \\ g(2) = f(2) \\ g(3) = f(3) \end{cases} \Rightarrow g = f$ (ya que son iguales en todo el dominio! $\hookrightarrow \text{dom}(f) = \{1, 2, 3\}$)
 $\Rightarrow \psi(\cdot)$ es inyectiva.

Sobreyectividad: Sean $(a_1, a_2, a_3) \in A^3$. PDQ: $\exists f \in \mathcal{F}$ t.q.
 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ y $f(3) = a_3$

En efecto, notamos que $|\{1, 2, 3\}| = |\{0_1, 0_2, 0_3\}|$, por lo tanto $\exists$ función biyectiva $f(\cdot) \rightarrow \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0_1, 0_2, 0_3\}$
 $\Rightarrow f(1) = 0_1$
 $f(2) = 0_2$
 $f(3) = 0_3$
 $\Rightarrow \psi$ es sobreyectiva.

Como ψ es inyectiva y epyectiva $\Rightarrow \psi$ es biyectiva por lo que se concluye que $|\mathcal{F}| = |A \times A \times A| //$

(b) Si A es numerable $\Rightarrow A \times A \times A$ también es numerable y como $|\mathcal{F}| = |A \times A \times A| \Rightarrow \mathcal{F}$ es numerable //

P5) (a) Definamos los conjuntos $A_i = \{1, 2, \dots, k-1, i\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, claramente $|A_i| = k \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tenemos que $\mathcal{A}$ es infinito y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_k \Rightarrow \mathcal{M}_k$ es infinito //

(b) $\mathcal{M}_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = 1\} = \{\{x\} \in \mathbb{N}\}$ o sea, los elementos de $\mathcal{M}_1$ son los singletos de $\mathbb{N}$ (o sea, $\{1\}, \{2\}, \dots$). La biyección es:
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}_1$
 $n \rightarrow \{n\}$ (Propuesto verificar que es biyección!)

(c) y (d): consideren función $f: \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{N}^k$ tq $\{0_i\} \in \mathcal{M}_k$, tenemos
 $f(\{0_i\}_{i=1}^k) = (0_1, 0_2, \dots, 0_k)$ donde $0_{i-1} < 0_i < 0_k \forall i=2, \dots, k-1 //$

(e) $\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}_k$ con $\mathcal{M}_k$ numerable, luego por unión de numerables se tiene que $\mathcal{M}$ es numerable.