Auxiliar 8

Sumatorias

RESUMEN SUMATORIAS

Definicion (Secuencia)**.** *Una* ***secuencia de reales*** *es una función $a : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{N}$. Se denota por $a_i = a(i)$.*

Proposiciones. *Las siguientes sumas son conocidas*

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ *(Telescópica)*
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$ *(suma constante)*
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, $a \neq 1$ *(Geométrica)*

Definicion (Suma conjunto de índices)**.** *Sea $a : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $f : [1, ..., n] \to \Omega$. Definimos $b_k = a_{f(k)}$ y:*

$$\sum_{k\in\Omega} a_w = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Ya... ¡¿Que me dice esto?! Que si se tiene una función $a : \Omega \to R$ que no necesariamente es una secuencia (Notemos que Ω no necesariamente es subconjunto de $\mathbb{N}$), puedo generar una secuencia f a partir de Ω, y así, definir la suma de los $w \in \Omega$, como la suma de una secuencia (la secuencia f). ¿Para que nos sirve? Todas las propiedades de sumatorias, las hemos definido para secuencias, por lo tanto, para la suma sobre Ω no tenemos propiedades! Pero si para f.

Definicion (Sumas dobles)**.** *Se tiene que:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_k b_j$$

Definicion (Intercambio de sumatorias)**.** *Se tiene que, en una sumatoria doble, si los límites inferiores y superiores de ambas sumas no dependen de los indices, entonces:*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$

P1.- (i) Resuelva las siguiente sumatoria

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$$

(ii) Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{5^k k + 2^k}{5^{k+1}}$$

(iii) **(PROPUESTO)** Demuestre que se tiene la siguiente igualdad para $x \neq y$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i = \frac{x^n - y^n}{x - y}$$

P2.- Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos secuencias de números reales. Considere los naturales p y n tales que $p \leq n$.

(i) Pruebe que

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^{n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k)$$

(ii) Calcule en función de $\mathcal{H}_n$ el valor de

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\mathcal{H}_k}{k(k-1)}$$

En donde $\mathcal{H}_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$

P3.- Calcule las siguientes sumas dobles

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k^2} \frac{n + k^2}{(n + j - 1)(n + j)}$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=1}^{i} 2^{i+j}$