Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 6

Funciones 2.0

RESUMEN CONTROL

Definicion (Inyectividad)**.** *Diremos que una $f\colon A \to B$ es **inyectiva** si se cumple que:*

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Definicion (Epiyectividad)**.** *Diremos que una función f:$A \to B$ es **epiyectiva** si se cumple que:*

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

Definicion (Biyectividad)**.** *Diremos que una función f:$A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva a la vez.*

Definicion (Inversa)**.** *Si una función f:$A \to B$ es biyectiva, entonces la **función inversa** $f^{-1}\colon B \to A$ existe y esta definida como:*

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Definicion (Composición)**.** *sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones. La composición de f y g, denotada por gof, se define como una función de A en C dada por:*

$$\forall x \in A, (gof)(x) = g(f(x))$$

Porposiciones. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones, entonces se cumple que:*

- *Si $f(x)$ es biyectiva, entonces $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$*
- *Si $f(x)$ es biyectiva, entonces $f^{-1}(f(y)) = y, \forall y \in B$*
- $(g\ o\ f)(x)$ *inyectiva* $\implies f(x)$ *inyectiva*
- *$(g$ o $f)(x)$ epiyectiva* $\implies g(x)$ *epiyectiva*

Definicion (Conjunto imagen)**.** *Sea $f\colon A \to B$ una función, y sea $A' \subseteq A$. Definimos el conjunto imagen de A' por f como:*

$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\}$$

Definicion. *Sea $f\colon A \to B$ una función y sea $B' \subseteq B$. Definimos el conjunto preimagen de B' por f como:*

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

Porposiciones. *Sea $f\colon A \to B$ una función, $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1, B_2 \subseteq B$*

- $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- *Si $f\colon A \to B$ epiyectiva $\implies$ f(A) = B*

P1 a) Considere las funciones $f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $g(q) = \frac{q}{2}$.

i) Determine el conjunto preimagen de $g^{-1}(\mathbb{Z})$ y el conjunto imagen de $(g \text{ o } f)(\mathbb{Z})$.

ii) **(PROPUESTO)** Determine si las funciones f, g y $(f \text{ o } g)$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

b) Sea $B \subseteq F$ y $f : E \to F$ una función biyectiva. Probar que:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

P2 Sea $\mathcal{U} \neq \phi$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ definida por $f : f(X, Y) = X \cup Y$ para cada $(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

i) Calcule, justificando su respuesta, $f^{-1}(\{\phi\})$.

ii) Demuestre que $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ t.q. } X^c \subseteq Y\}$

iii) Demuestre que f es epiyectiva.

iv) ¿Es f biyectiva? Justifique.

P3 Sean $A, B \subseteq U$ tales que $A \cap B = \phi$. Sea $f : U \to U$ una función, pruebe que:

i) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$

ii) Si f es inyectiva, entonces $f(A) \cap f(B) = \phi$.

iii) Probar que si f es sobreyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$.