

Auxiliar 5

Funciones

RESUMEN SEMANA 5

Definición (Inyectividad). Diremos que una función $f: A \rightarrow B$ es **inyectiva** si se cumple que:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Definición (Epiyectividad). Diremos que una función $f: A \rightarrow B$ es **epiyectiva** si se cumple que:

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

Definición (Biyectividad). Diremos que una función $f: A \rightarrow B$ es **biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva a la vez.

Definición (Inversa). Si una función $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces la **función inversa** $f^{-1}: B \rightarrow A$ existe y esta definida como:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Definición (Composición). Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones. La composición de f y g , denotada por $g \circ f$, se define como una función de A en C dada por:

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Proposiciones. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones, entonces se cumple que:

- Si $f(x)$ es biyectiva, entonces $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$
- Si $f(x)$ es biyectiva, entonces $f^{-1}(f(y)) = y, \forall y \in B$
- $(g \circ f)(x)$ inyectiva $\implies f(x)$ inyectiva
- $(g \circ f)(x)$ epiyectiva $\implies g(x)$ epiyectiva

P1 a) Estudie la inyectividad de la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \\ n/2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

b) Sea A un conjunto con al menos dos elementos. Y sean $f: A \times A \rightarrow A$ y $g: A \rightarrow A \times A$ definidas por:

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = x \text{ con } (x, y) \in A \times A$$

$$x \rightarrow g(x) = (x, x) \text{ con } x \in A$$

- (i) Demuestre que $(f \circ g) = id_A$.
- (ii) Determine si f, g son inyectivas, epiyectivas, biyectivas.
- (iii) ¿Es $(g \circ f) = id_{A \times A}$?

P2 a) Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ y $h : B \rightarrow B$ funciones tales que:

◦ h es biyectiva.

◦ $f \circ g = h$.

◦ $g \circ f = Id_A$

(i) Muestre que f y g son biyectivas.

(ii) Muestre que $h = Id_B$

b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(f \circ f)(x) = x + 1$.

(i) Probar que f es biyectiva .

(ii) Probar que no es cierto que $(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x + y) = f(x) + f(y)$.

P3 Sean $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones biyectivas. Determine explícitamente las expresiones que definen a f y g sabiendo que $(g \circ f)(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5}$ y $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$ en cada $x \in \mathbb{R}$.

P4 Sea E un conjunto de referencia y $B_0 \subseteq E$. Considere la función $\mathcal{F} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ definida como:

$$\mathcal{F}(X) = (X \setminus B_0, X \cap B_0) \forall X \in \mathcal{P}(E)$$

a) Demuestre que la función $\mathcal{F}$ es inyectiva. (*HINT: Use que $X = (X \setminus B_0) \cup (X \cap B_0)$*)

b) Demuestre que $\mathcal{F}$ NO es epiyectiva.